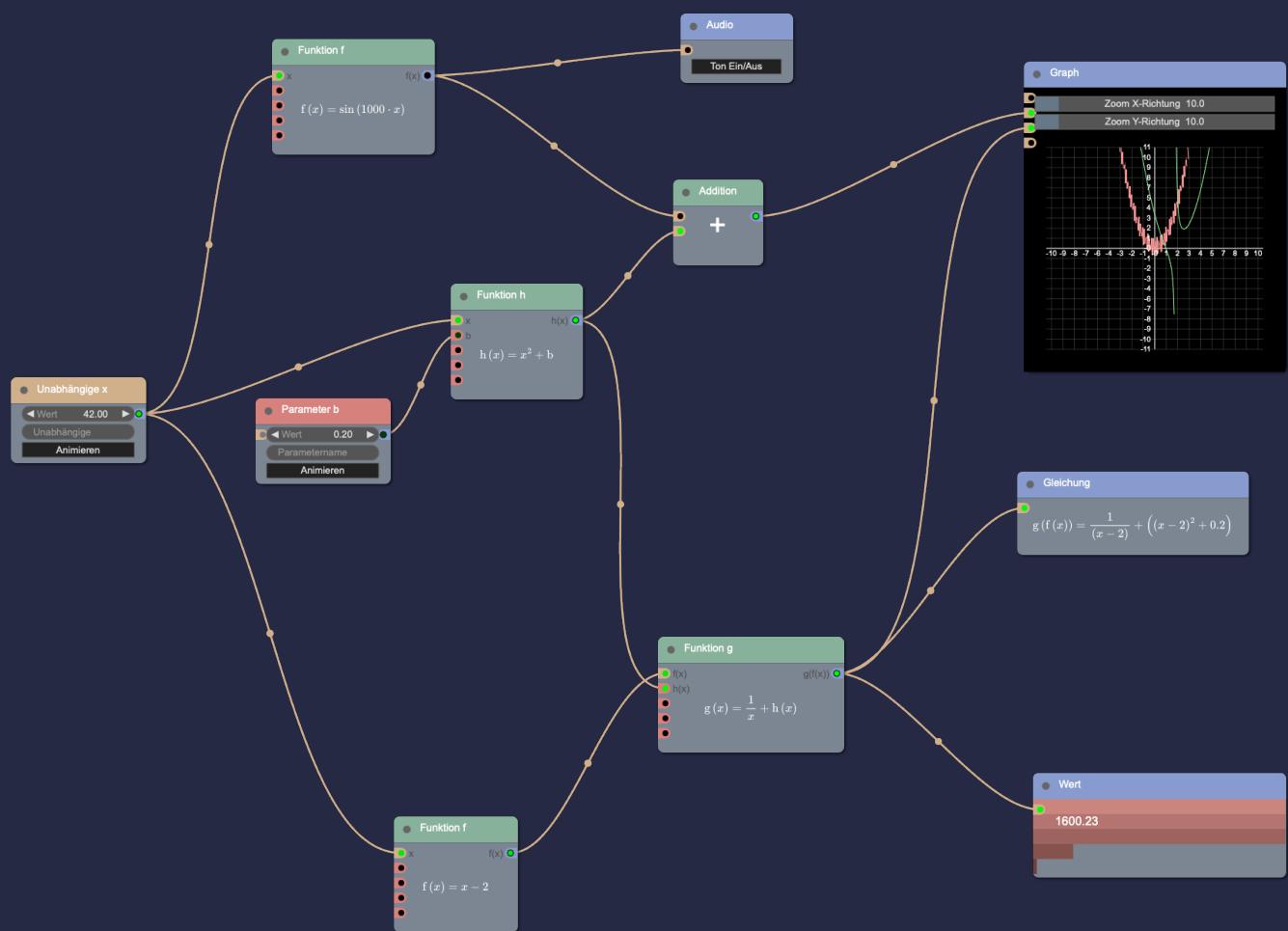


Math-Nodes Arbeitsheft

SPIELERISCH LERNEN MIT FUNKTIONSMASCHINEN
EIN PROJEKT VON NICOLAS REGEL



Aufgabenentwicklung: Nicolas Regel, Paul Busse
Konzeption: Nicolas Regel
Redaktion: Nicolas Regel, Paul Busse
Layout: Nicolas Regel
Feedback, Korrektur: Andrea Hoffkamp, Lisa Nickolaus, Michael Schröder, Laura Degenhardt

Danksagung:

Ein herzlicher Dank gilt allen Kolleg:innen, Schüler:innen und Unterstützer:innen, die mit Ideen, Rückmeldungen und Motivation zur Entstehung dieses Arbeitshefts beigetragen haben.

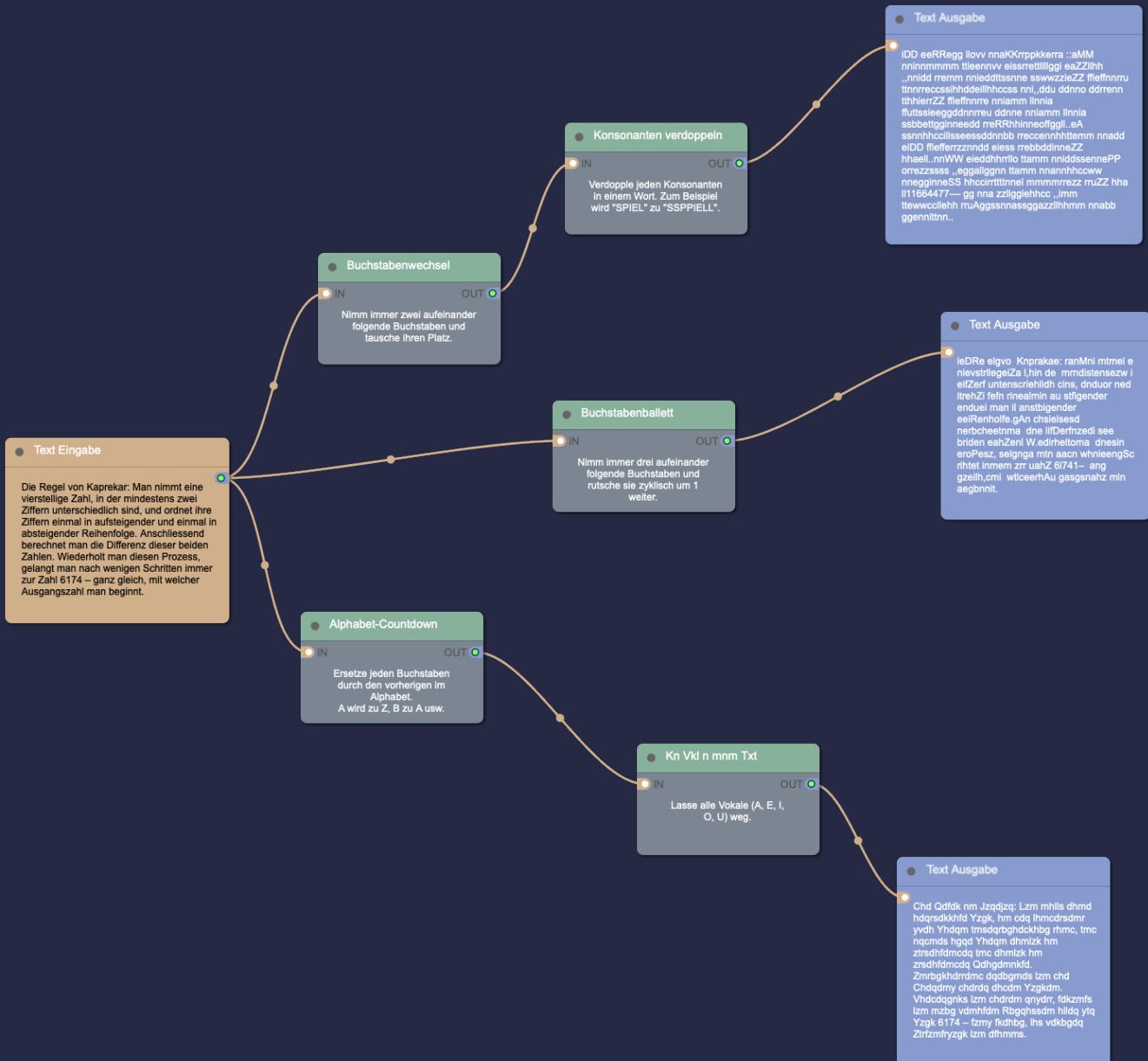
Inhaltsverzeichnis

1	Wortmaschinen	4
1	Deine erste Verbindung	5
2	Deinen ersten Text verschlüsseln	6
3	Maschinen verketten	7
4	Welche Maschine war es?	9
5	Entschlüsseln einer Nachricht	10
6	Wie wurde verschlüsselt?	11
7	Umkehrbar oder nicht?	11
8	Uneindeutig, Eindeutig oder Eineindeutig?	13
9	Umkehrfunktionen	14
10	Geheime Nachrichten senden	15
11	Geheime Nachrichten empfangen	15
2	Funktionsmaschinen	16
1	Von Wortmaschine zur Funktion	17
2	Funktionsmaschinen verketten	18
3	Wo ist der Unterschied?	20
4	Funktionsmaschinen verknüpfen	24
5	Verknüpfen und Verketten	25
6	Den Graphen treffen	27
7	Funktionenpuzzle	29
8	Graphenwirrwarr	30
3	Parameter und Substitution	34
1	Parameter	35
2	Triff den Graphen	36
3	Wo ist die Parabel?	37
4	Symmetrisch oder nicht?	38
5	Symmetriewechsel	39
6	Funktionenpuzzle mit Parametern	41
4	Funktionen hören	42
1	Der erste Ton	43
2	Der Einfluss von Parametern	43
3	Sinusfunktion quadrieren – Sehen und Hören	44
4	Die Klavierkarte	45
5	Klavier oder Geige?	46

6	Wort zu Ton	47
7	Klangfarbe	48
8	Instrumentenwerkstatt	49

1. Wortmaschinen

N a c h r i c h t e n v e r - u n d e n t s c h l ü s s e l n



Wie funktioniert es?

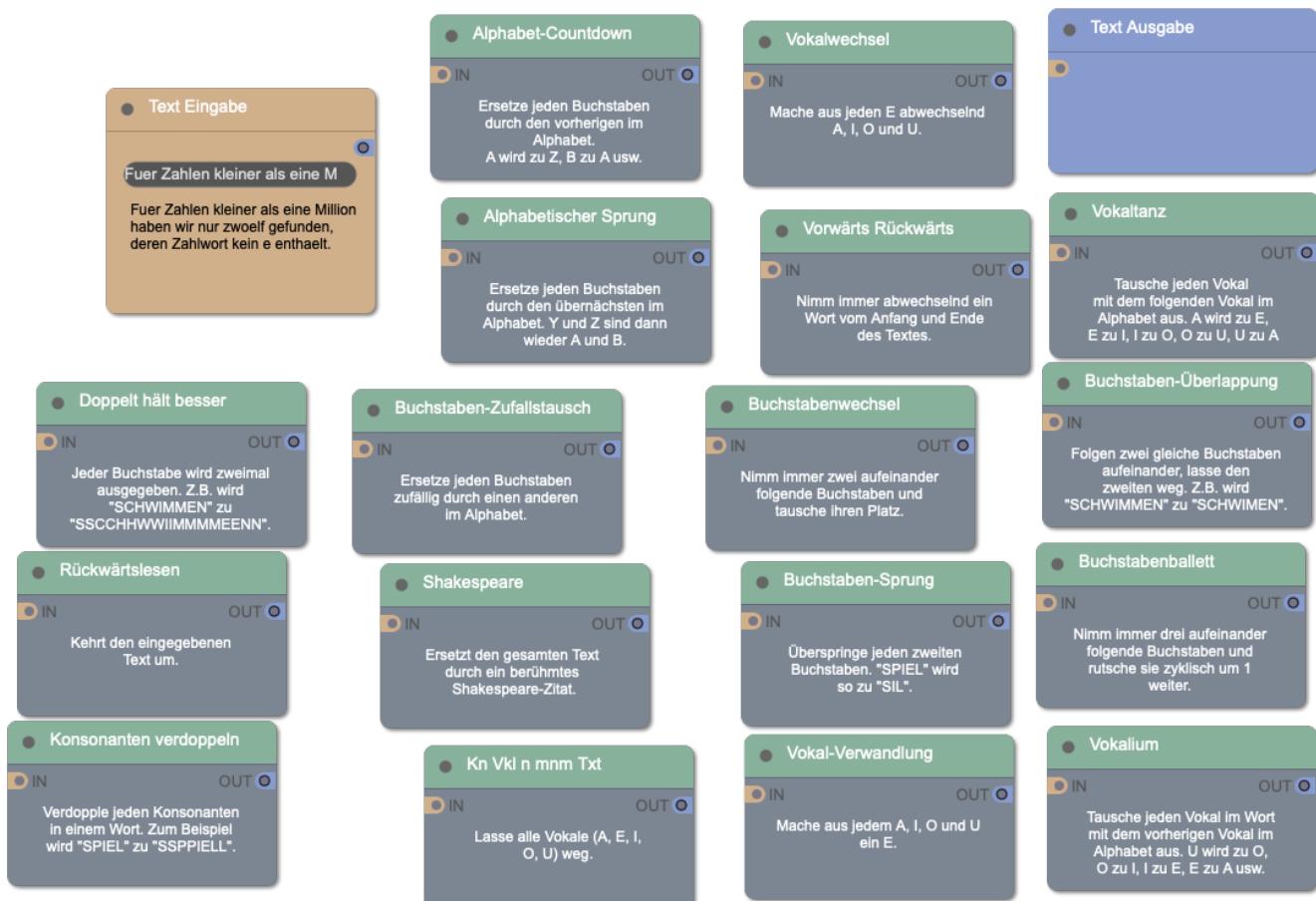
Hier kannst du Nachrichten verschlüsseln und entschlüsseln und dabei spielerisch das Verketten von Funktionen verstehen. Später lernst du auch etwas über Umkehrfunktionen.

1 Deine erste Verbindung

Verbinde die unteren Karten wie im Beispiel oben, indem du ein Kabel vom Ausgang der Text-Eingabe-Karte zum Eingang der Text-Ausgabe-Karte ziehst. Wenn du das geschafft hast, klicke auf das Text-Eingabe-Feld auf der Text-Eingabe-Karte und gib etwas ein. Siehst du es auf der Ausgabe-Karte? Du kannst das Kabel auch wieder trennen, indem du es am Ausgang anfasst und die Verbindung von da löst. Versuche es!

Wenn du zu wenig Platz auf deinem Bildschirm hast, kannst du die Karten über das Menü verkleinern oder den Vollbildmodus nutzen.

Überblick über alle Wortmaschinen

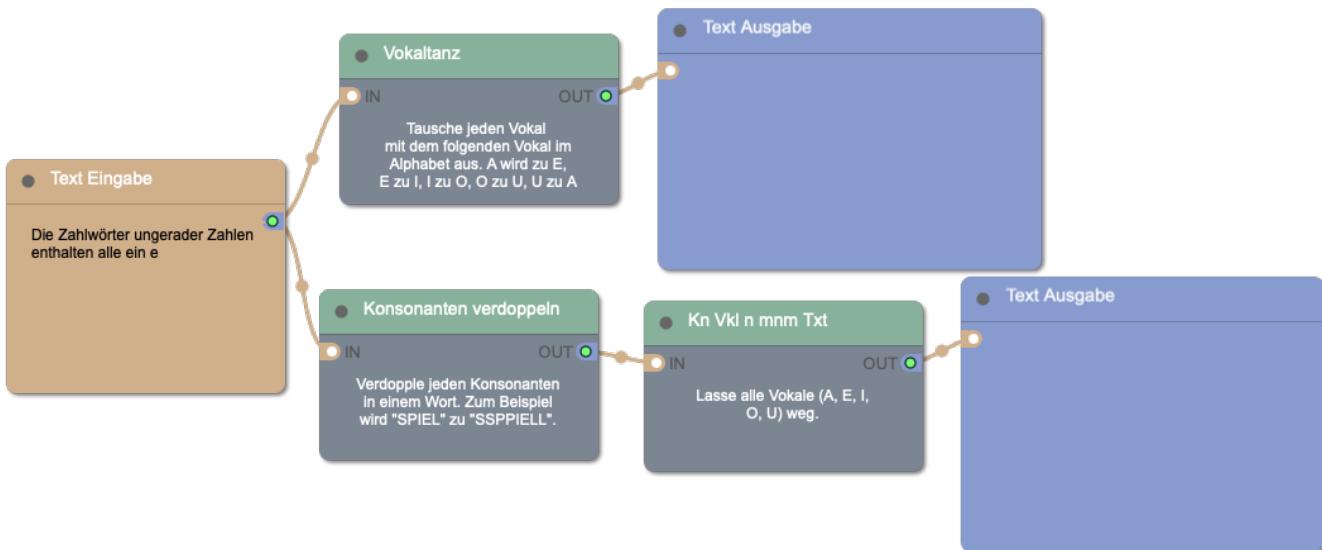


2 Deinen ersten Text verschlüsseln

Du kannst deinen Text mit verschiedenen Maschinen (grüne Karten) manipulieren. Verbinde dazu die Text-Eingabe-Karte mit der Vokaltanz-Maschine und diese dann mit der Text-Ausgabe-Karte. Was passiert mit deinem Text?

Neue Karten kannst du über einen Doppelklick in deine Verkabelung laden. Verschaffe dir einen Überblick darüber, welche es gibt! Eine Übersicht findest du auch im Arbeitsheft.

Du kannst natürlich auch mehrere Maschinen hintereinander verwenden. Das nennt man in der Mathematik Verketten. Die Maschinen bilden dann gemeinsam eine neue Maschine, die deinen Text in der verbundenen Reihenfolge verändert. Probiere es aus! Notiere dein Ergebnis im Arbeitsheft.

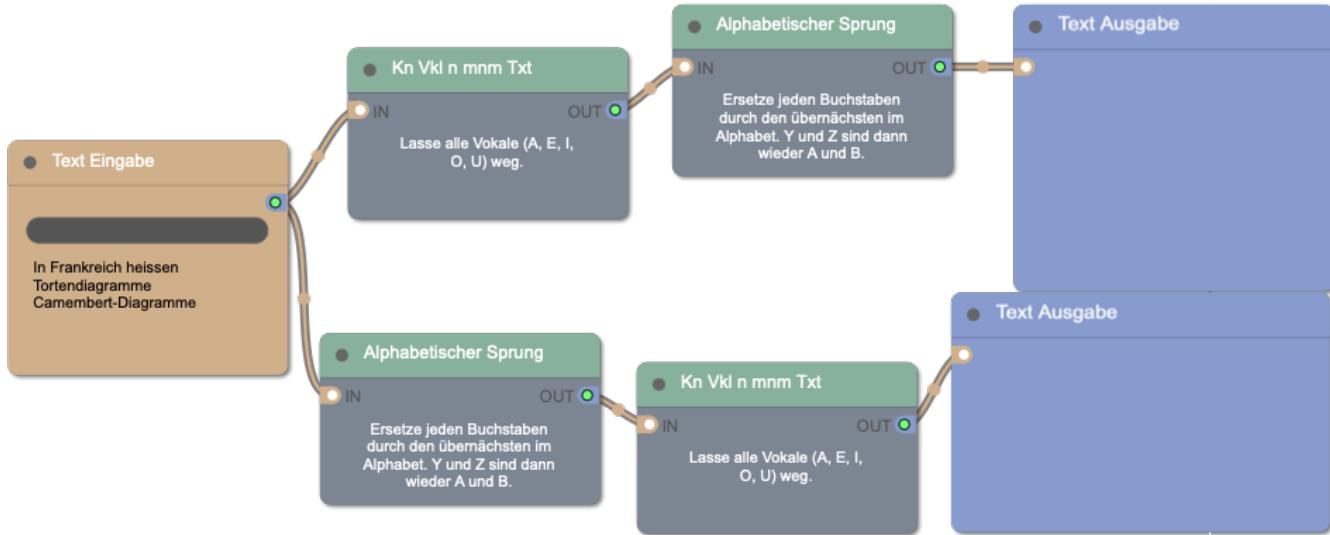


3 Maschinen verketten

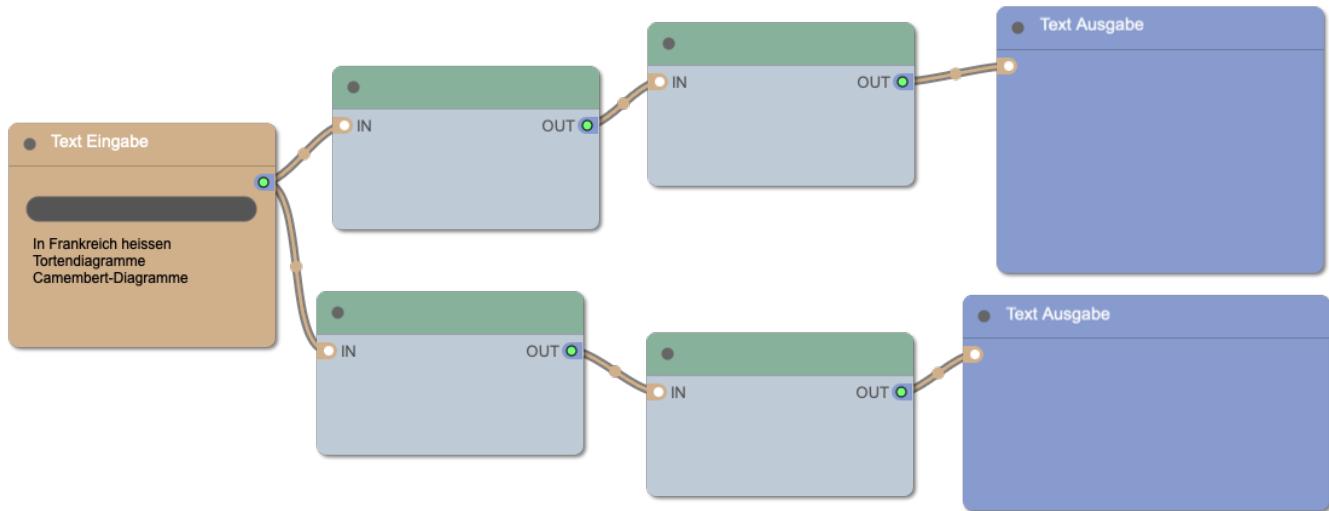
Zwei Maschinen kannst du in unterschiedlicher Reihenfolge verbinden. Spielt die Reihenfolge eine Rolle für das Ergebnis?

a) Probiere es aus und begründe deine Antwort im Arbeitsheft.

b) Ist das immer so? Findest du zwei, bei denen die Reihenfolge egal ist? Gib die gefundenen Maschinen an, notiere den Ergebnis-Text und erkläre, was hier anders ist.



a) _____



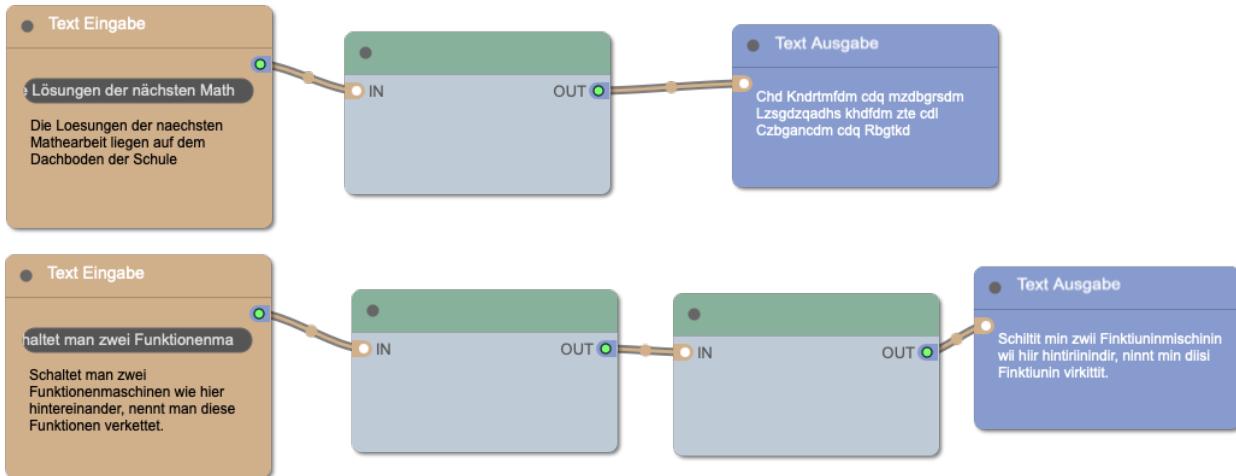
b) _____

4 Welche Maschine war es?

Hier sind zwei Nachrichten verschlüsselt worden. Einmal mit einer Maschine und einmal mit zwei Maschinen hintereinander.

Überlege erst, was am Text verändert wurde und welche Maschinen es gewesen sein könnten. Probiere es aus und schreib den Namen der richtigen Maschine in das entsprechende Feld im Arbeitsheft.

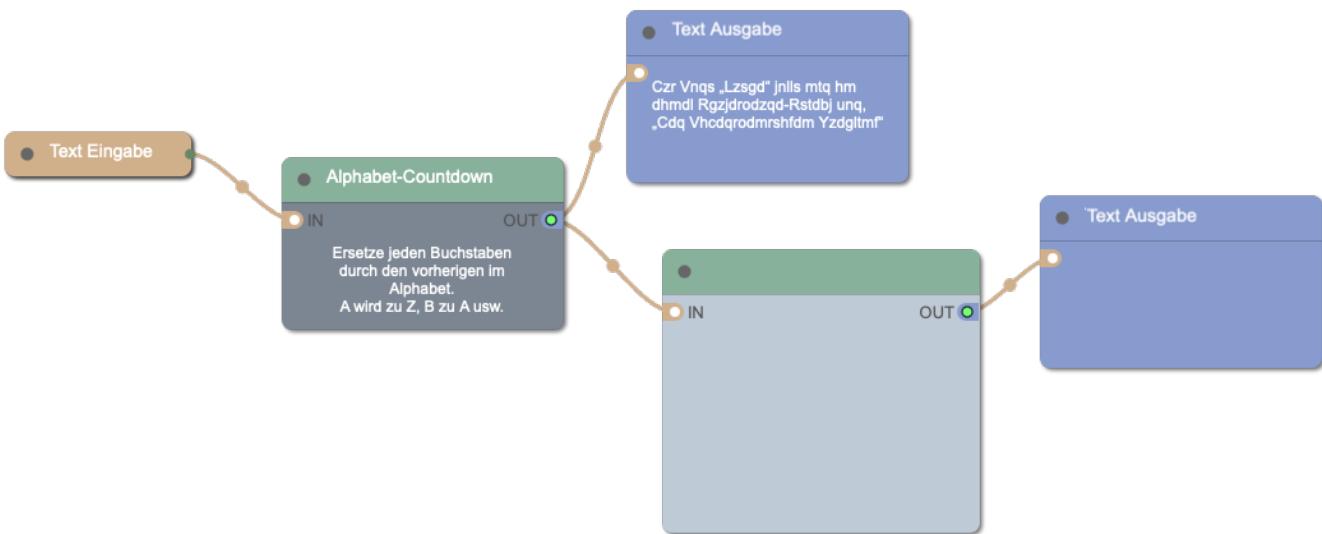
Tipp: Klickst du doppelt auf den Titel einer Karte, kannst du sie durch eine andere ersetzen.



5 Entschlüsseln einer Nachricht

Mit der Alphabet-Countdown-Maschine wurde eine Nachricht verschlüsselt.

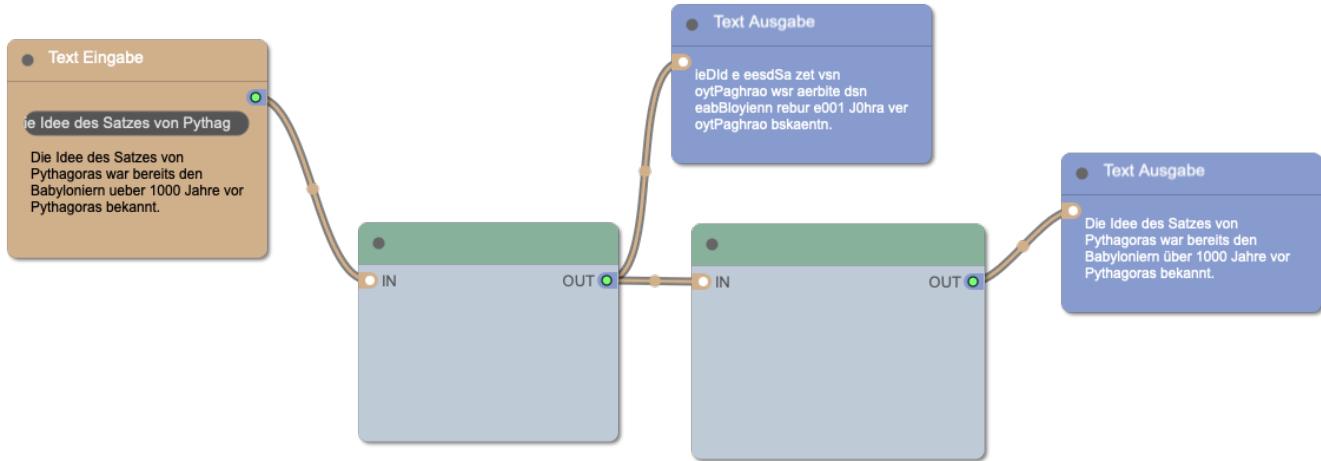
- a) Überlege dir eine Maschine, um die Nachricht wieder zu entschlüsseln. Gib ihr einen Namen und beschreibe ihre Funktionsweise im Arbeitsheft.
- b) Genau die richtige Maschine zum Entschlüsseln der Botschaft scheint es in Math-Nodes nicht zu geben. Kannst du sie aus anderen Maschinen zusammenbauen? Wie lautet die Botschaft?



- b) _____
- _____

6 Wie wurde verschlüsselt?

Mit welcher Maschine wurde hier verschlüsselt und wie kannst du das rückgängig machen?



7 Umkehrbar oder nicht?

Kannst du dir zu jeder Maschine eine Maschine ausdenken, die die damit verschlüsselte Nachricht wieder entschlüsselt? Notiere deine Überlegungen im Arbeitsheft.

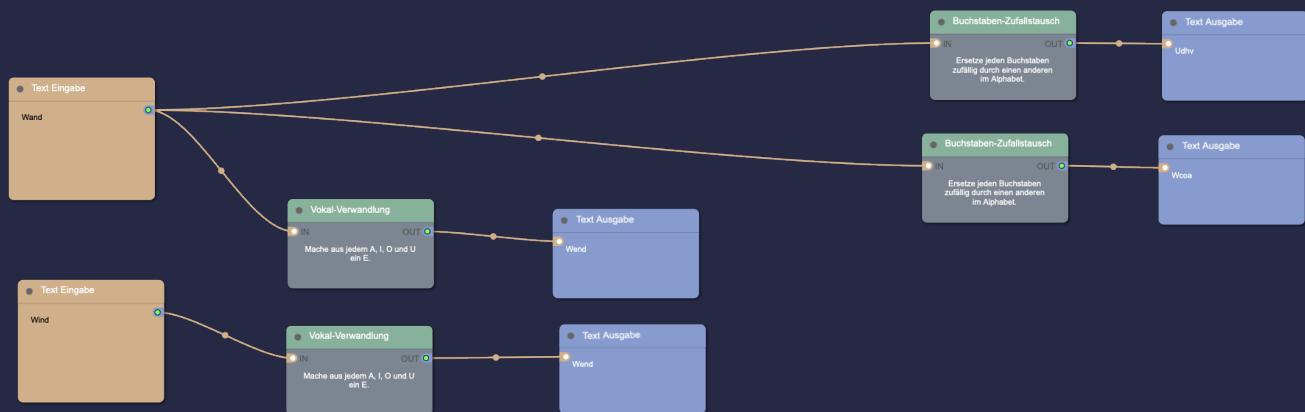
Versuche in Math-Nodes ein Beispiel zu finden, um deine Theorie zu bestätigen.

Uneindeutigkeit, Eindeutigkeit, Eineindeutigkeit?

Wie du siehst, gibt es Maschinen wie den Buchstaben-Zufallstausch, bei denen für die gleiche Eingabe unterschiedliche Ergebnisse entstehen können. Solche Maschinen nennen wir in der Mathematik uneindeutig.

Andere Maschinen wie die Vokal-Verwandlung erzeugen für die gleiche Eingabe immer die gleiche Ausgabe, aber es kann mehrere Eingaben geben, die die gleiche Ausgabe erzeugen. Hier werden zum Beispiel Wand und Wind zu Wend. Solche Maschinen nennen wir in der Mathematik eindeutig, aber nicht eineindeutig.

Maschinen, die eindeutig sind und bei denen jede Ausgabe nur durch genau eine Eingabe erzeugt werden kann, nennen wir eineindeutig.



8 Uneindeutig, Eindeutig oder Eineindeutig?

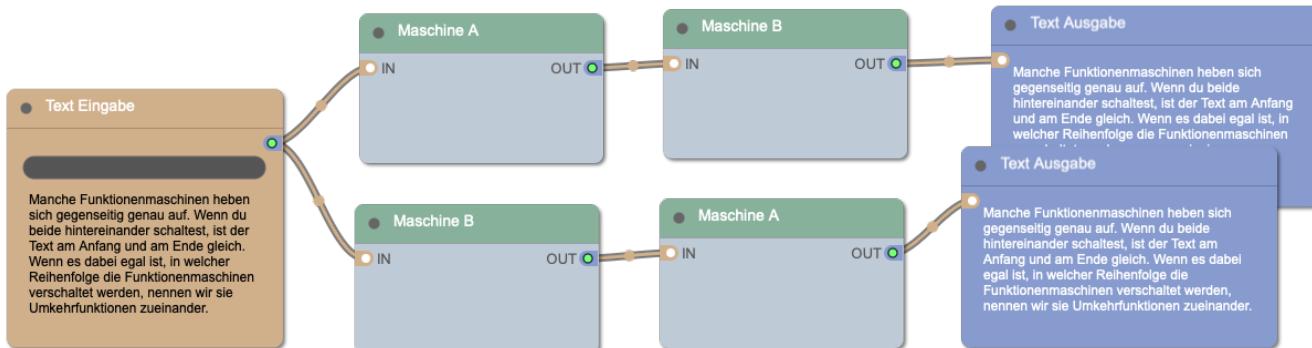
Welche der Maschinen sind uneindeutig, eindeutig oder eineindeutig? Fülle die Tabelle im Arbeitsheft aus und gib Beispiele für verschiedene Eingaben an, die die gleiche Ausgabe erzeugen.

Tipp: Du kannst per Doppelklick die Maschinen auch ein zweites Mal ins Fenster laden.

Wortmaschine	un-eindeutig	eindeutig	ein-eindeutig	Beispiel
Buchstaben-Zufallstausch				
Buchstabenwechsel				
Buchstaben-Überlappung				
Alphabet-Countdown				
Vokal-Verwandlung				
Shakespeare				
Konsonanten verdoppeln				

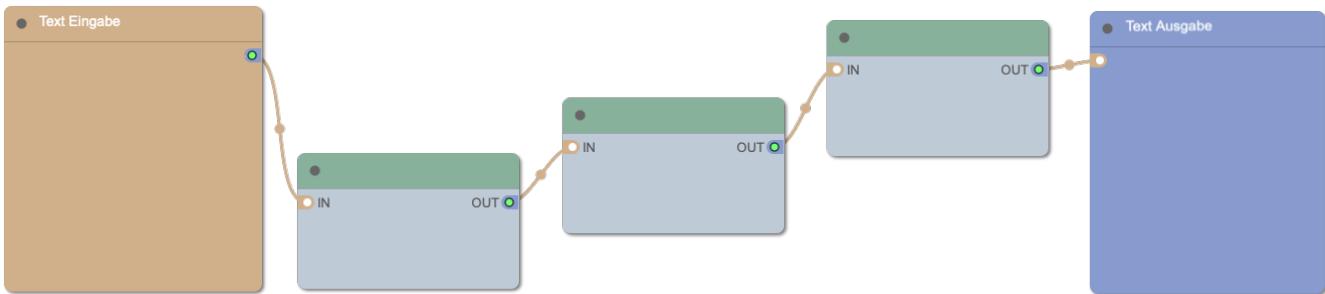
9 Umkehrfunktionen

Überlege, welche der Maschinen Umkehrfunktionen zueinander sind. Gib sie an, begründe deine Entscheidung im Arbeitsheft und prüfe an einem Beispiel.



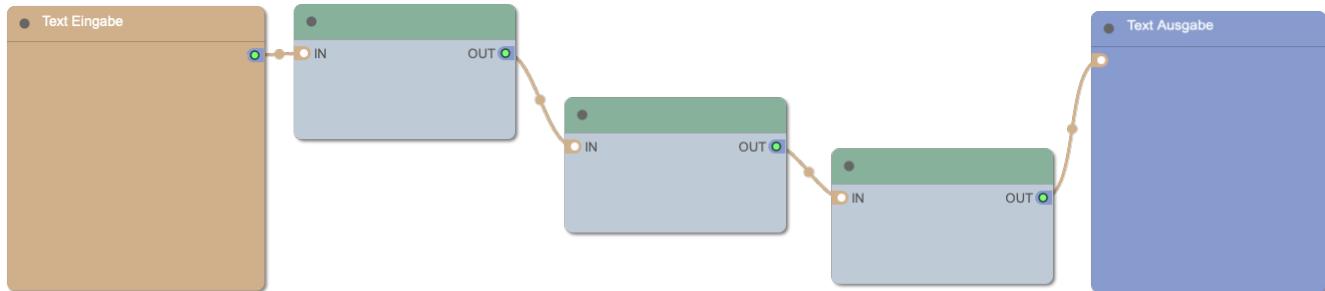
10 Geheime Nachrichten senden

Überleg dir eine Nachrichten für die Person neben dir und schreib sie auf. Wähle bis zu drei Maschinen zum Verschlüsseln aus, gib sie an und verschlüssle deine Nachricht damit. Achte bei der Auswahl deiner Maschinen darauf, dass die Nachricht auch wieder entschlüsselbar ist.



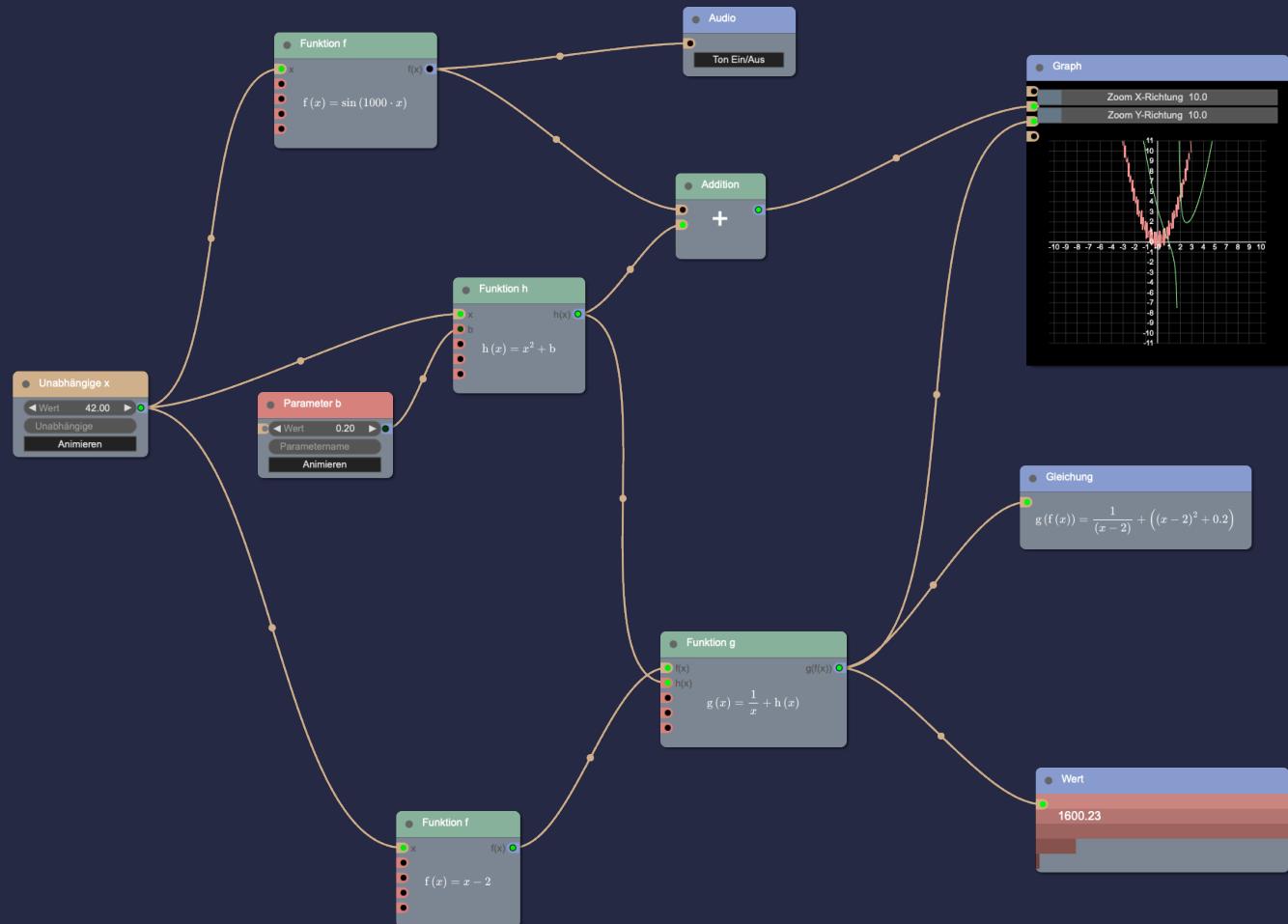
11 Geheime Nachrichten empfangen

Tauscht eure verschlüsselten Nachrichten aus und probiert sie wieder zu entschlüsseln. Notiere deine empfangene Nachricht und deine Lösung.



2. Funktionsmaschinen

Mathe matische Funktionen Verknüpfen und Verketten lernen



Funktionen als Maschinen

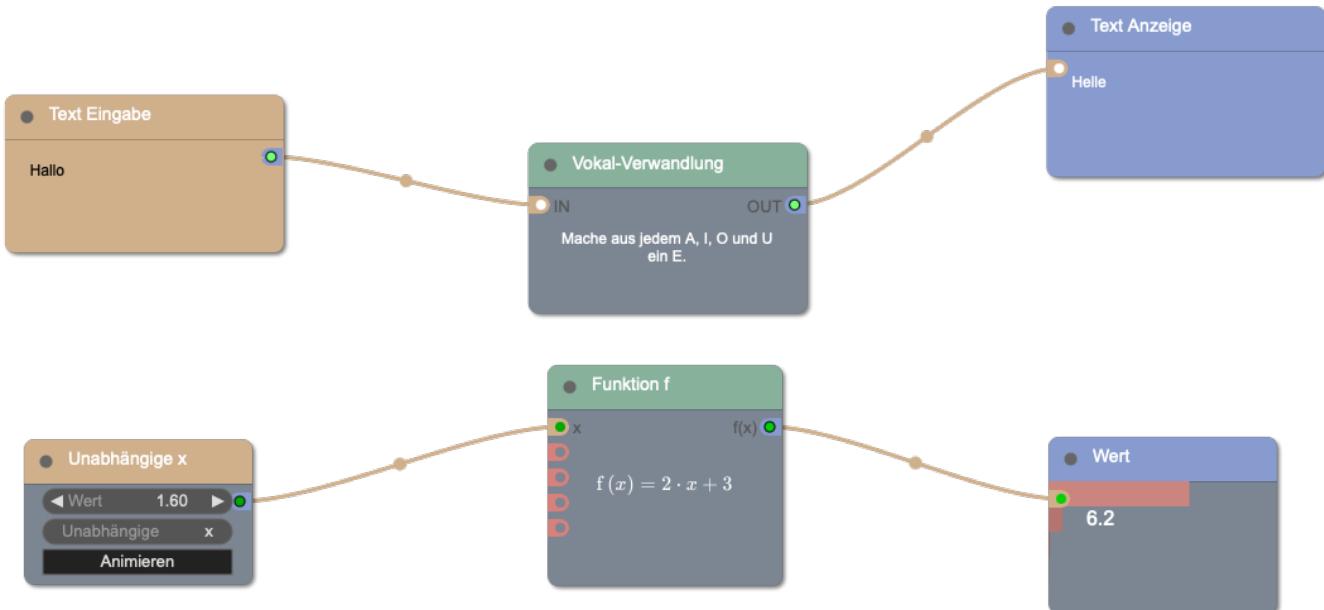
Eine mathematische Funktion kannst du dir vorstellen wie eine Maschine mit einem Eingang und einem Ausgang. Man gibt etwas in die Maschine hinein und erhält dann etwas am Ausgang der Maschine. Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist dabei, dass immer das Gleiche am Ausgang herauskommt, wenn wir das Gleiche am Eingang einwerfen. Aus dem Kapitel Wortmaschinen weißt du, wie diese Eigenschaft heißt.

1 Von Wortmaschine zur Funktion

Die Maschinen in diesem Kapitel kennst du schon als Funktionen schon aus der Schule. Mathematisch gesehen hast du aber im ersten Kapitel auch schon mit Funktionen gearbeitet.

Das Prinzip bleibt also das gleiche. Auch hier gibt es eine Eingabe in Form einer gelben Karte für die unabhängige Variable. Diese wird von einer oder mehreren grünen Funktionsmaschinen verarbeitet und das Ergebnis mit Hilfe von verschiedenen blauen Ausgabe-Karten angezeigt.

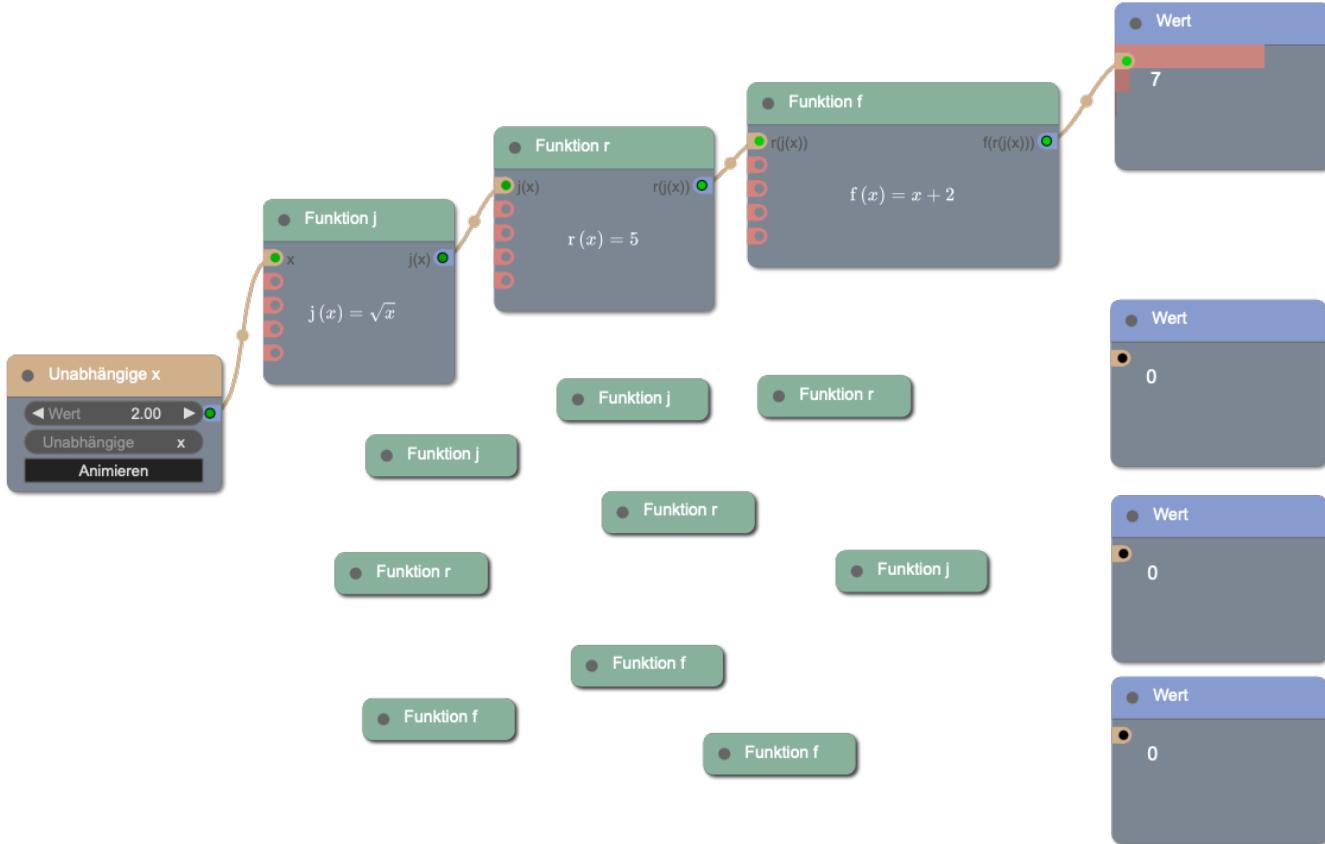
Probiere verschiedene Eingaben an der unabhängigen Variablen aus und beobachte, wie sich die Ausgabe in der Wert-Karte verändert.



2 Funktionsmaschinen verketten

Genau wie im ersten Kapitel kannst du auch Funktionsmaschinen hintereinander schalten. Die Maschinen bilden dann gemeinsam eine neue Maschine, die deinen Wert in der verbundenen Reihenfolge verändert. Probiere verschiedene Kombinationen aus und notiere sie mit den Ergebnissen für die unabhängige Variable $x = 2$ im Arbeitsheft.

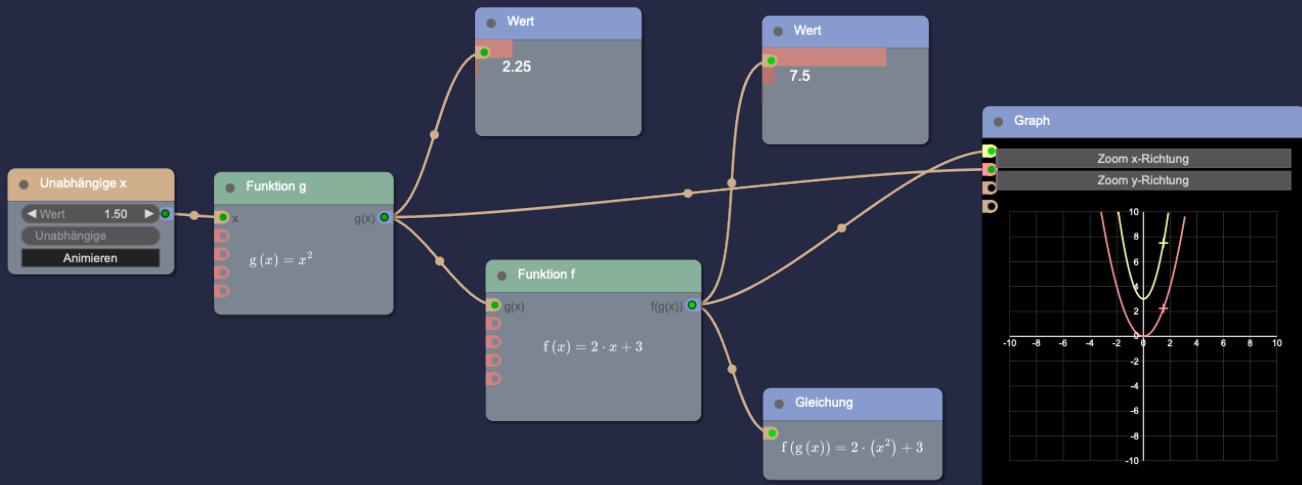
Bonusaufgabe: Wie viele **verschiedene** Maschinen kannst du aus den 3 gegebenen bauen, wenn du immer alle verwendest?



Andere Darstellungen der Ausgabe

In Math-Nodes kannst du dir außer dem Wert zu einer unabhängigen Variable auch die Gleichung, den Graphen und sogar den Klang (Kapitel 4) einer Maschine ausgeben lassen. Dazu gibt es jeweils eine eigene Ausgabe-Karte. Ausgabe-Karten sind immer blau.

In der Graph-Karte siehst du nicht nur den Graph einer Funktion, sondern auch ein kleines Kreuz. Das ist der Funktionswert für den eingestellten Wert der unabhängigen Variable.

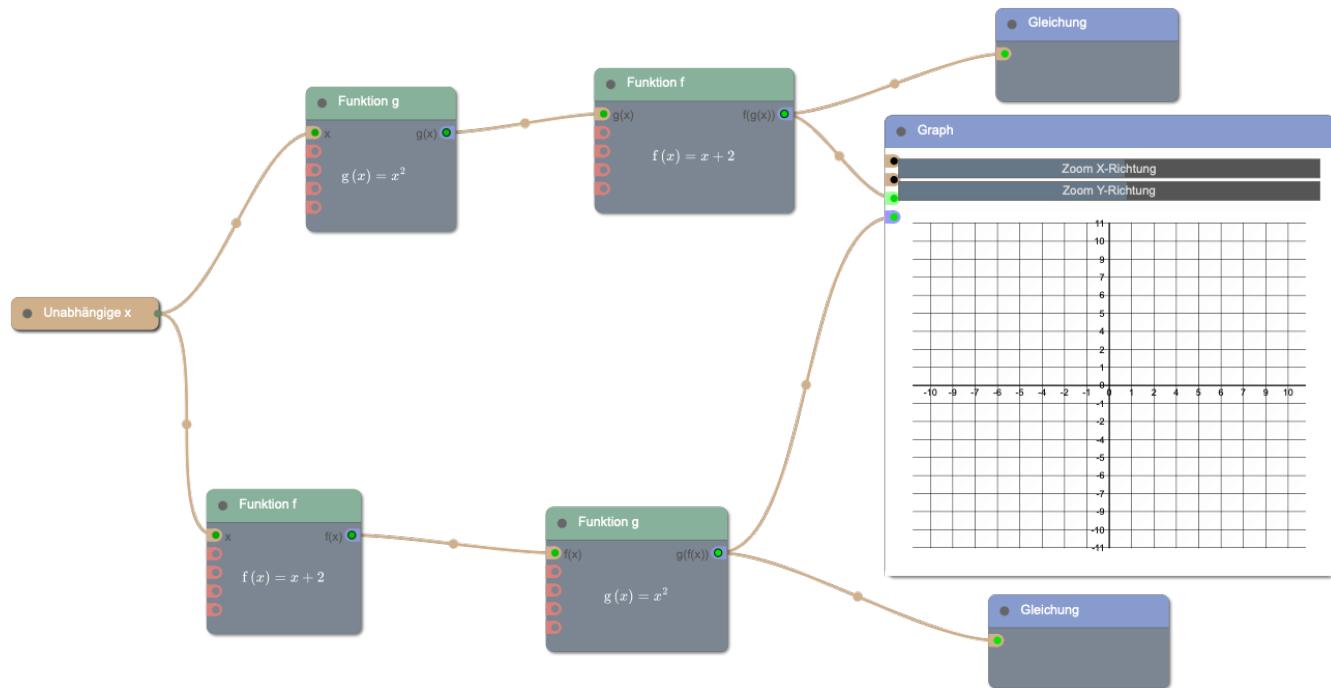


3 Wo ist der Unterschied?

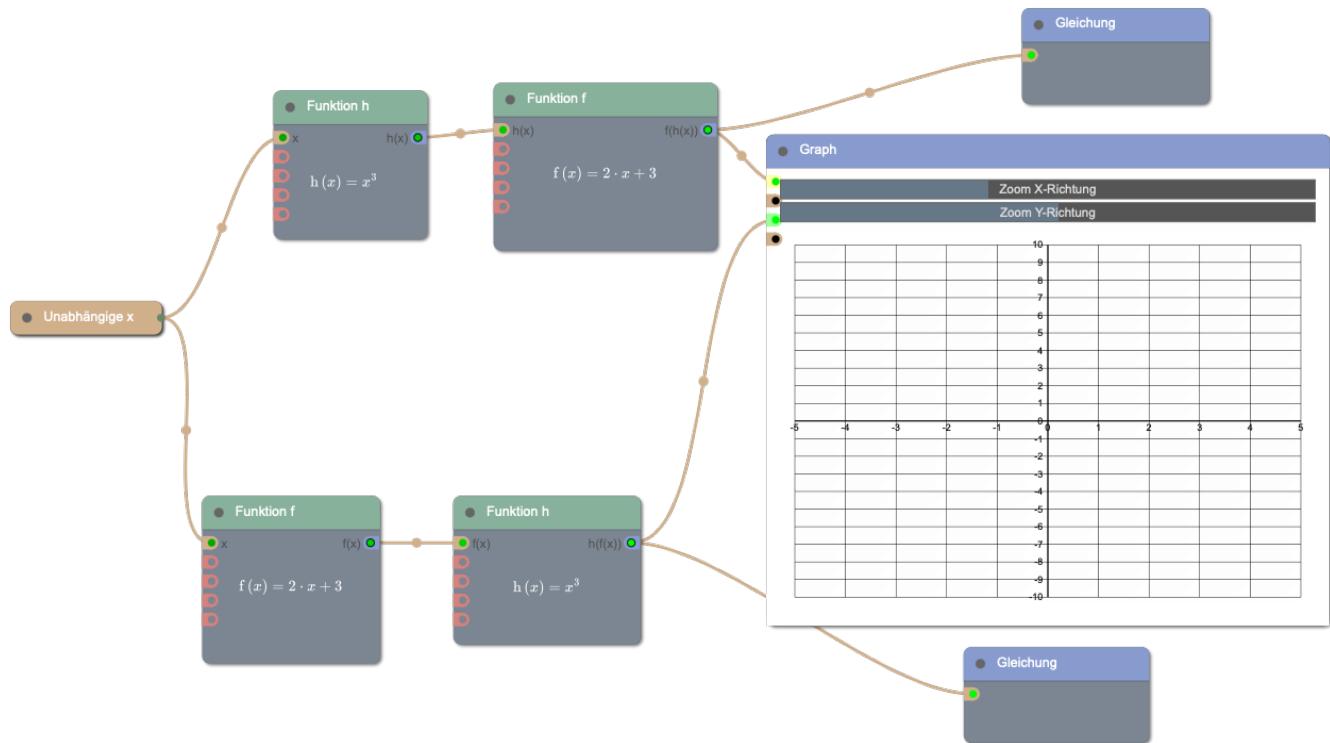
Hier sind zwei Funktionsmaschinen in umgekehrter Reihenfolge verkettet worden. Überlege, wie die Funktionsgleichung der Verkettung lautet und der Graph aussehen müsste und probiere es dann aus.

Skizziere die Graphen und beschreibe, worin sie sich unterscheiden und warum.

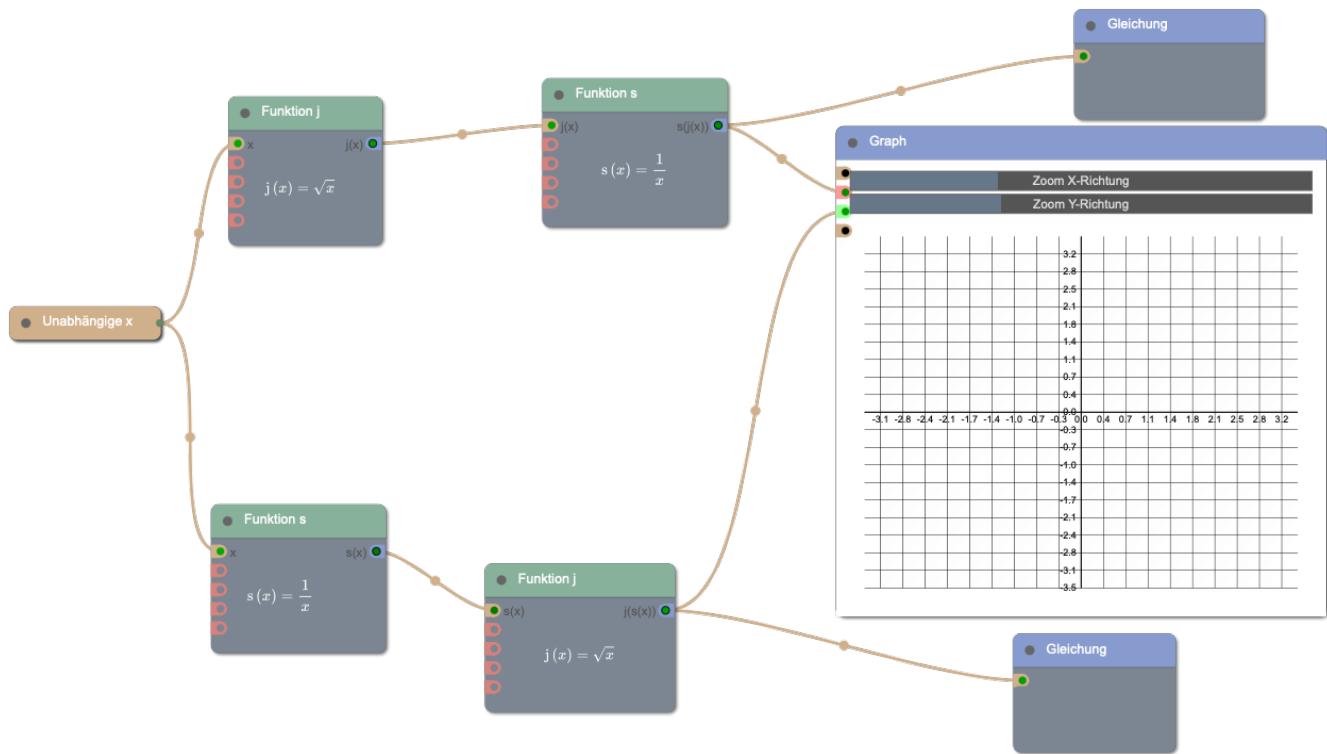
a)



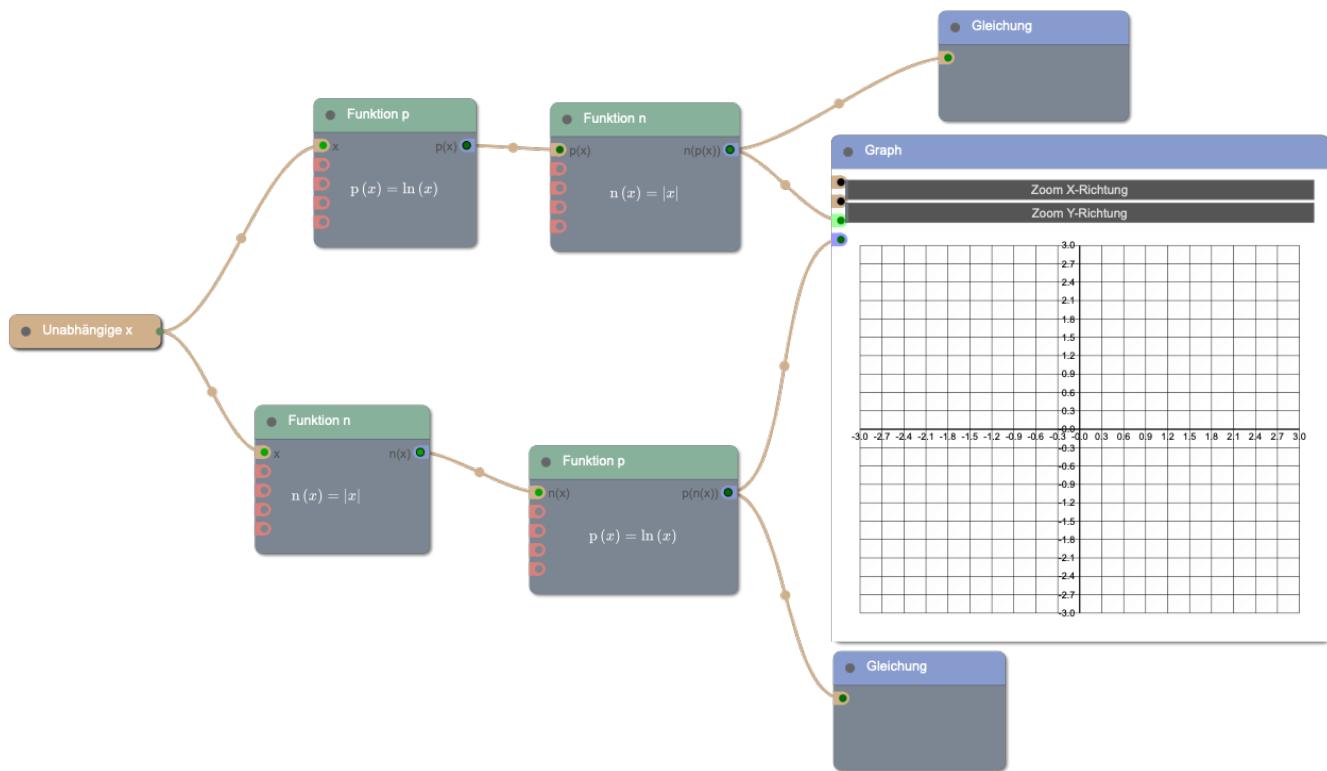
b)



c)



d)

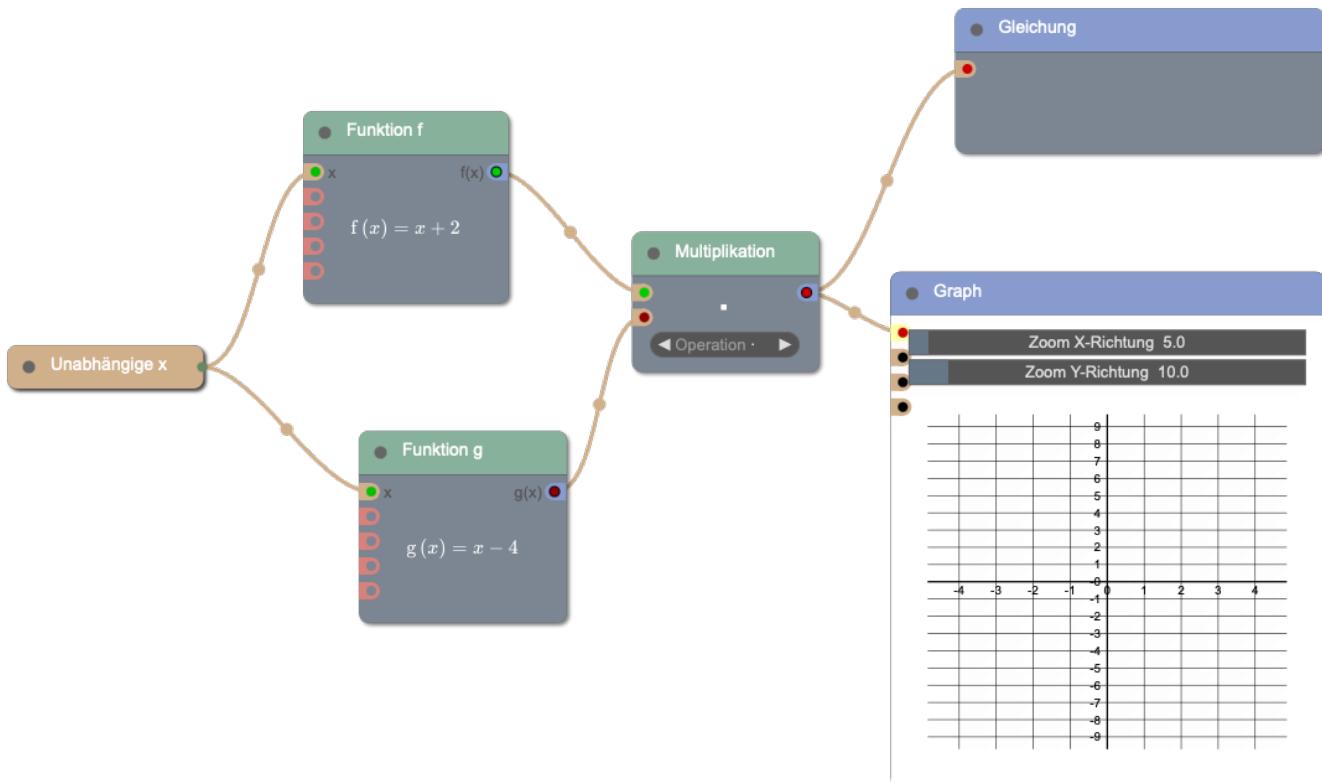


4 Funktionsmaschinen verknüpfen

Du kannst zwei Funktionsmaschinen nicht nur verketten, sondern auch mittels einer Operationsmaschine mit den Operationen Addition, Multiplikation, usw. verknüpfen.

Im Arbeitsheft findest du ein zweites Beispiel. Gib dafür die Funktionsgleichung an. Wie könnte der Graph aussehen? Diskutiere mit der Person neben dir und skizziere dann den Graphen.

Beachte: Wenn du die Gleichung-Karte anschließt, vereinfacht Math-Nodes die Funktionsterme nicht. Kannst du den Term noch ausmultiplizieren?



Tipp: Funktionsmaschinen einstellen

In vielen Aufgaben in Math-Nodes ist die Struktur, in der verkettet und verknüpft wird, schon vorgegeben und du sollst die passenden Funktions- und Operationsmaschinen auswählen.

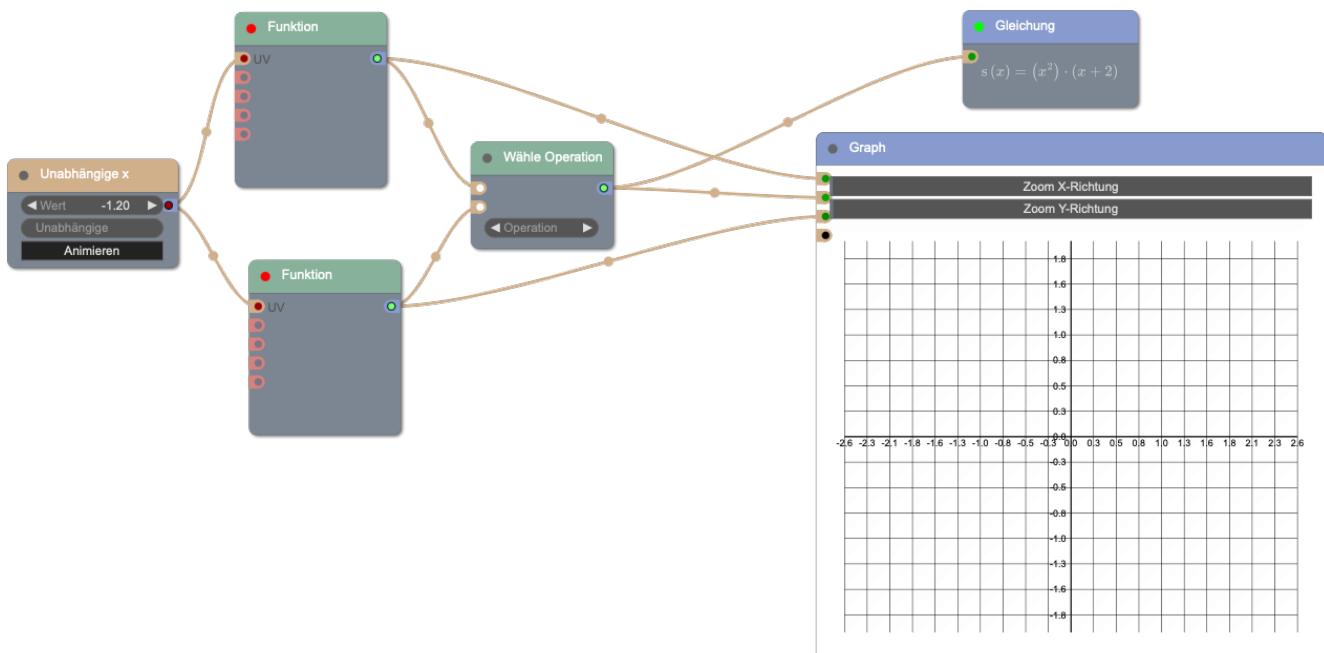
Klickst du mit der rechten Maustaste oder am Tablet mit zwei Fingern auf eine Funktionsmaschine, werden dir ein paar Funktionen vorgeschlagen, mit denen du die Aufgabe lösen kannst oder du kannst die freie Eingabe aktivieren.

5 Verknüpfen und Verketten

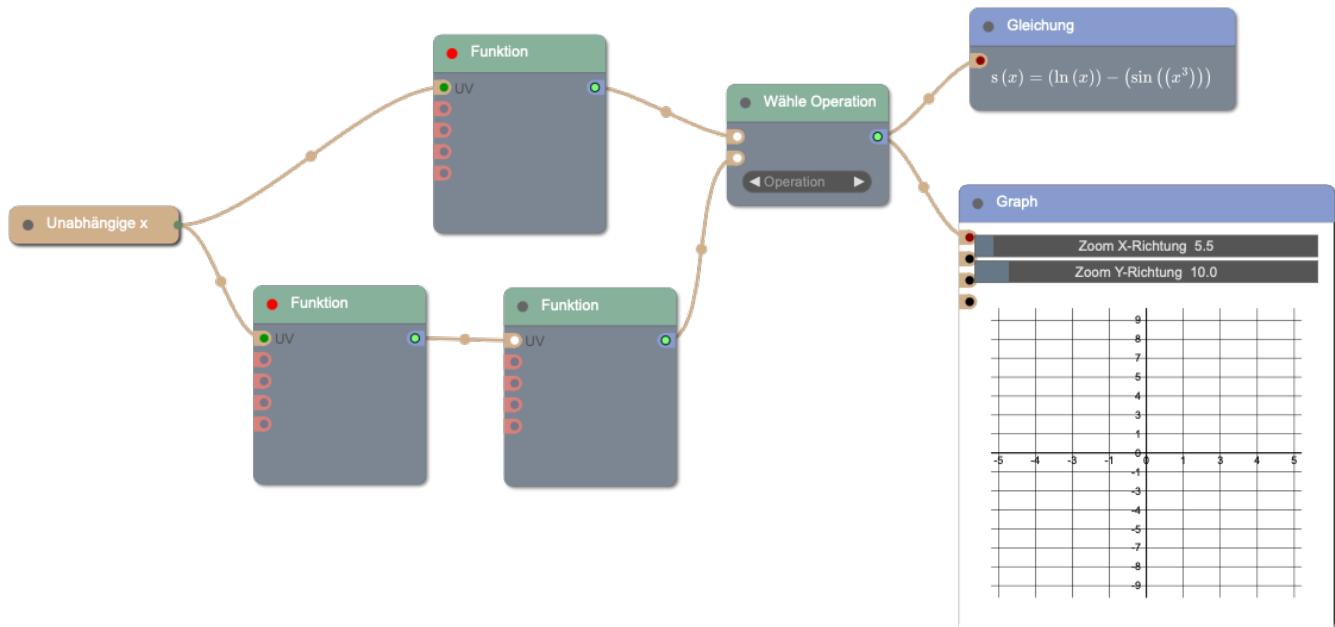
Wähle die Funktionen und die Operation für deine Maschinen so, dass du den angegebenen Funktionsterm in der Gleichung-Karte erhältst. Notiere deine Lösung und skizziere den Graphen. Beschreibe, welchen Einfluss die einzelnen Maschinen auf den Graphen der Gesamtfunktion haben.

Verbinde die Funktionsmaschinen zusätzlich einzeln mit der Graph-Karte. So kannst du den Graphen der Gesamtfunktion mit dem der Teiltraktions vergleichen.

a)



b)

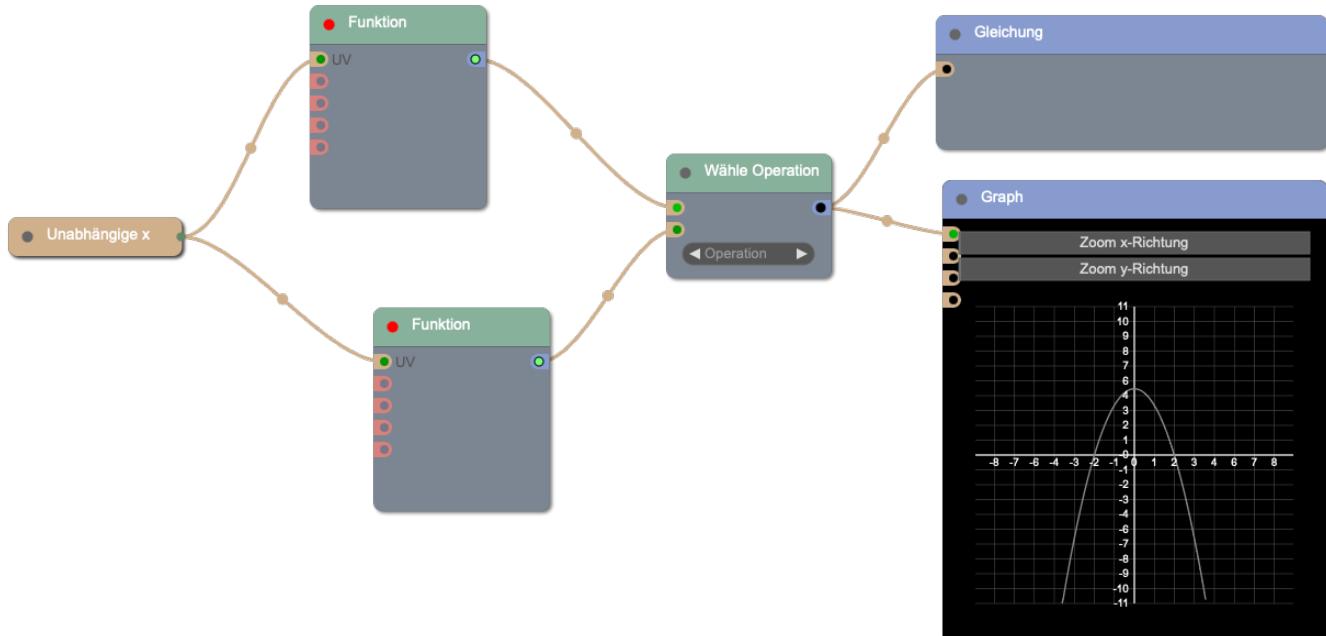


6 Den Graphen treffen

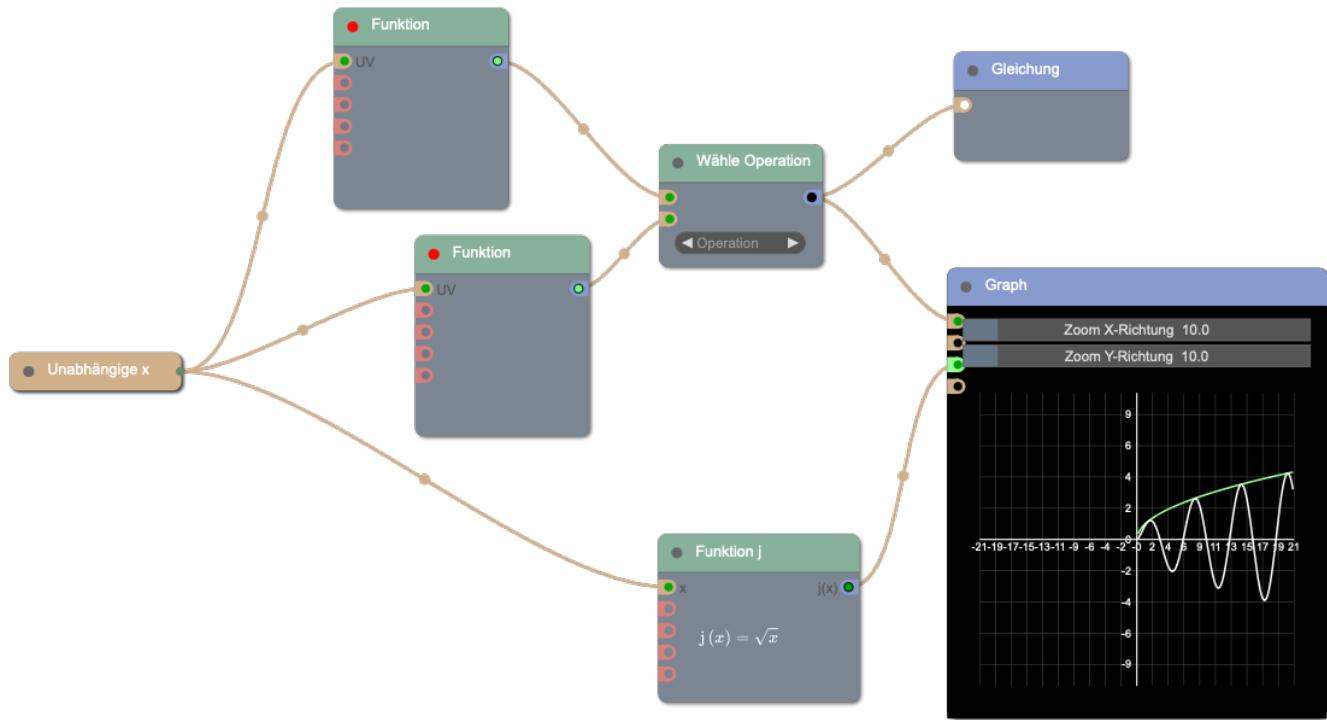
Wähle die Funktionen und die Operation für deine Maschinen so, dass der weiße Graph entsteht. Notiere die Lösung und erläutere dein Vorgehen.

Für **b:** Erläutere den Zusammenhang zwischen dem weißen und dem grünen Graphen.

a)



b)



7 Funktionenpuzzle

Verknüpfe und/oder verkette die Funktionsmaschinen so, dass die weißen Graphen entstehen. Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung im Arbeitsheft an.

Wenn du es richtig gelöst hast, ist keine Karte übrig.

a) _____

b) _____

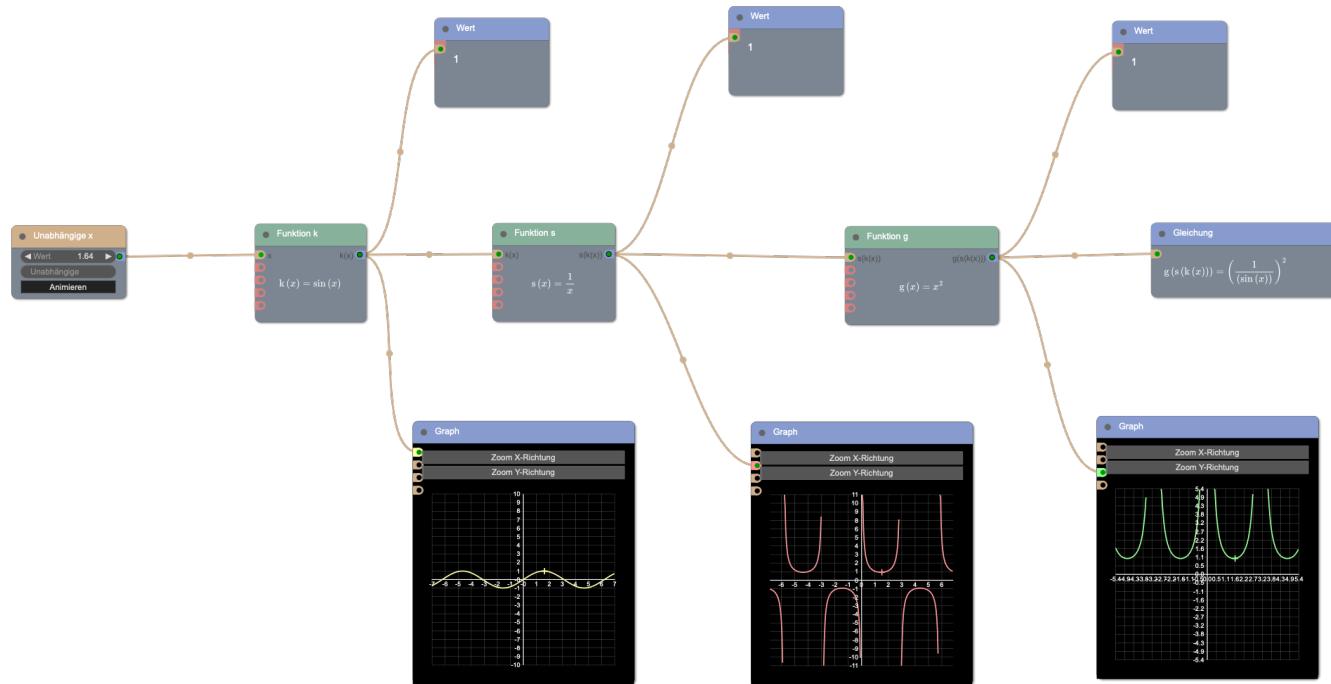
c) _____

8 Graphenwirrwarr

Beschreibe den Zusammenhang zwischen den einzelnen Graphen. Finde besondere Werte für die unabhängige Variable, an denen du das Verhalten des Graphen erklären kannst.

Schau dir die Lösung für das erste Beispiel im Arbeitsheft an.

a)

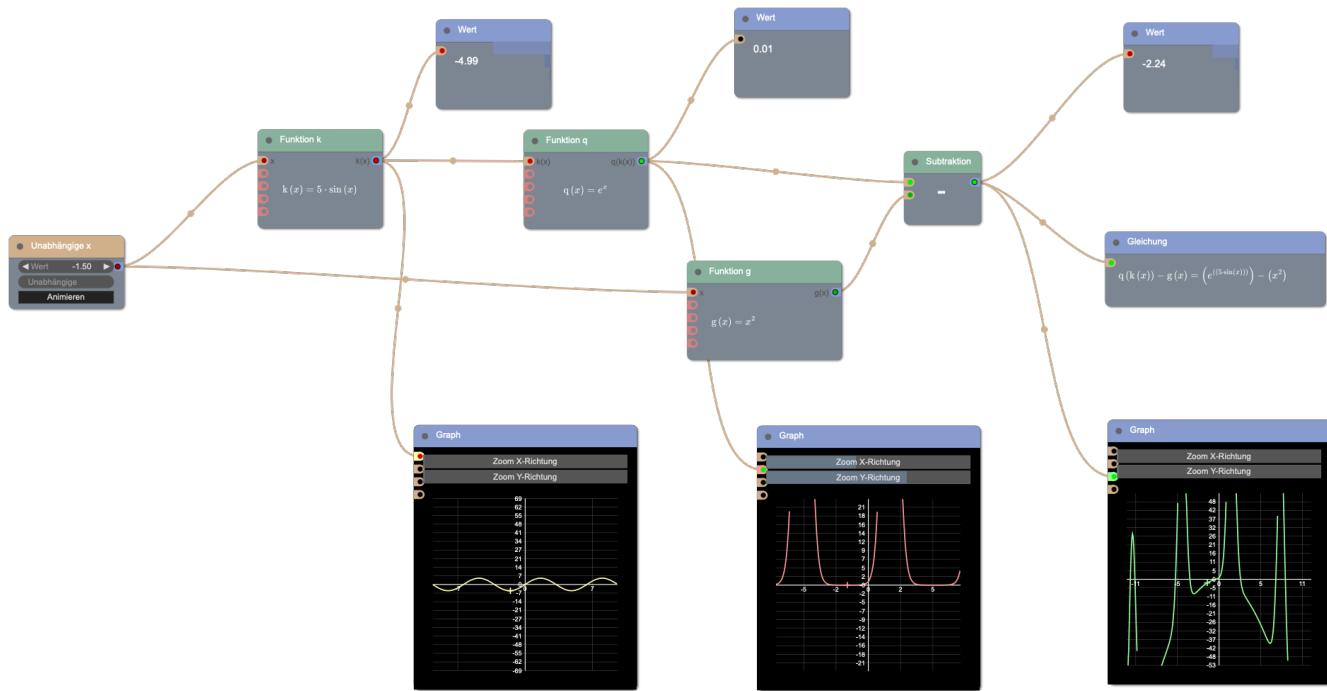


Der erste Graph ist eine Sinusfunktion. Auch die anderen beiden Graphen sind deshalb periodisch.

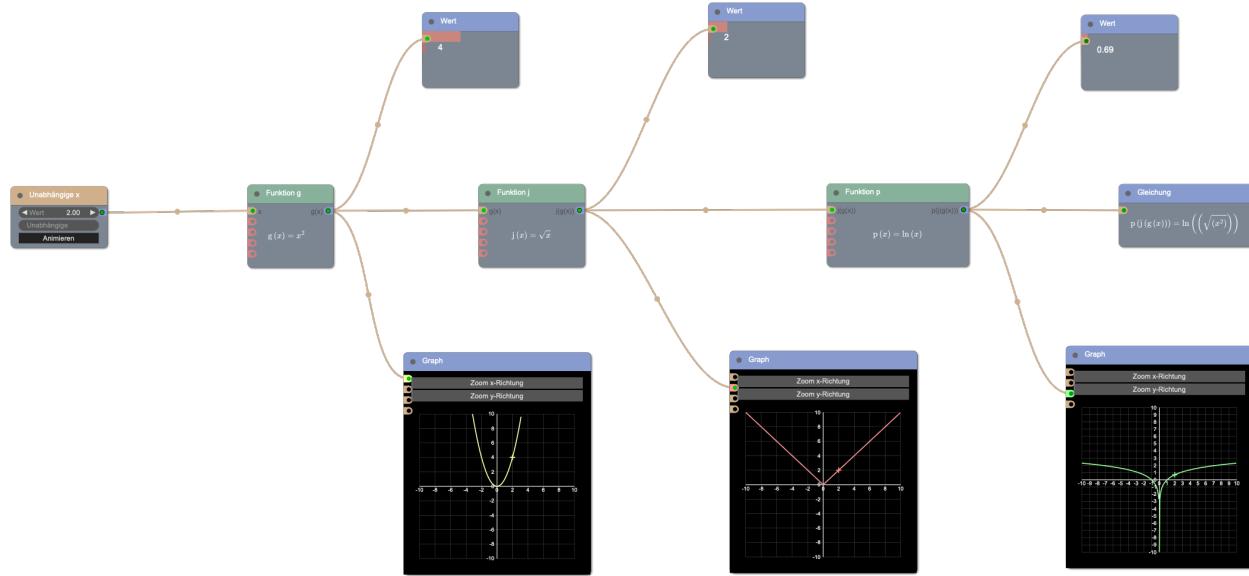
Besondere Werte für die unabhängige Variable sind die Nullstellen der Sinusfunktion. Diese werden im zweiten Graphen zu Polstellen, weil der Nenner an diesen Stellen null wird.

Beim Graphen ganz rechts sind alle Werte durch das Quadrieren positiv.

b)

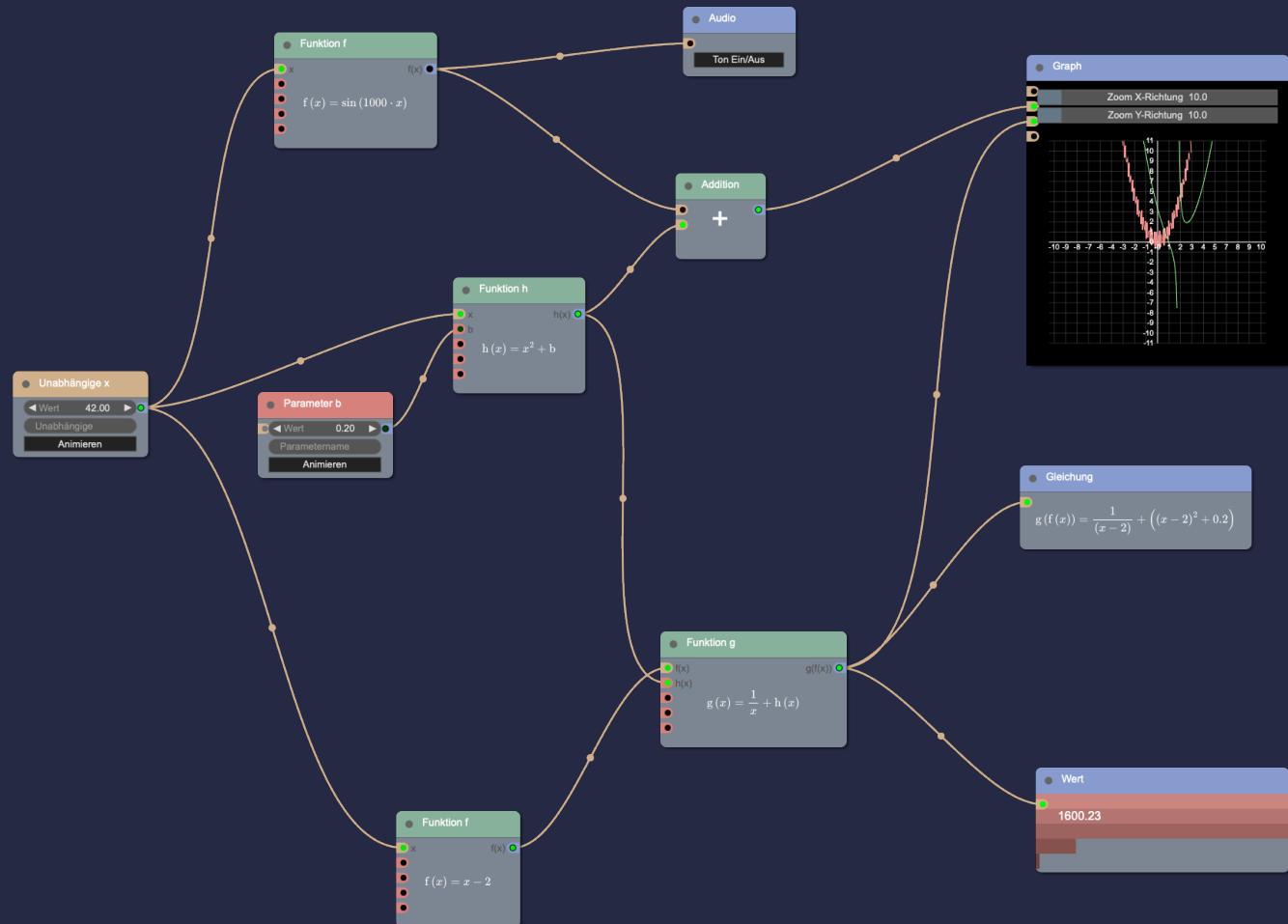


c)



3. Parameter und Substitution

Funktionsmaschinen für Fortgeschritten



Funktionen als Maschinen

Hier findest du weiterführende Aufgaben zu den Funktionsmaschinen. Insbesondere neu dazukommen Parameter und die Idee der Substitution.

1 Parameter

In Math-Nodes haben Funktionsmaschinen nicht nur einen Eingang für die unabhängige Variable. Mit den weiteren Eingängen kannst du Parameter verwenden.

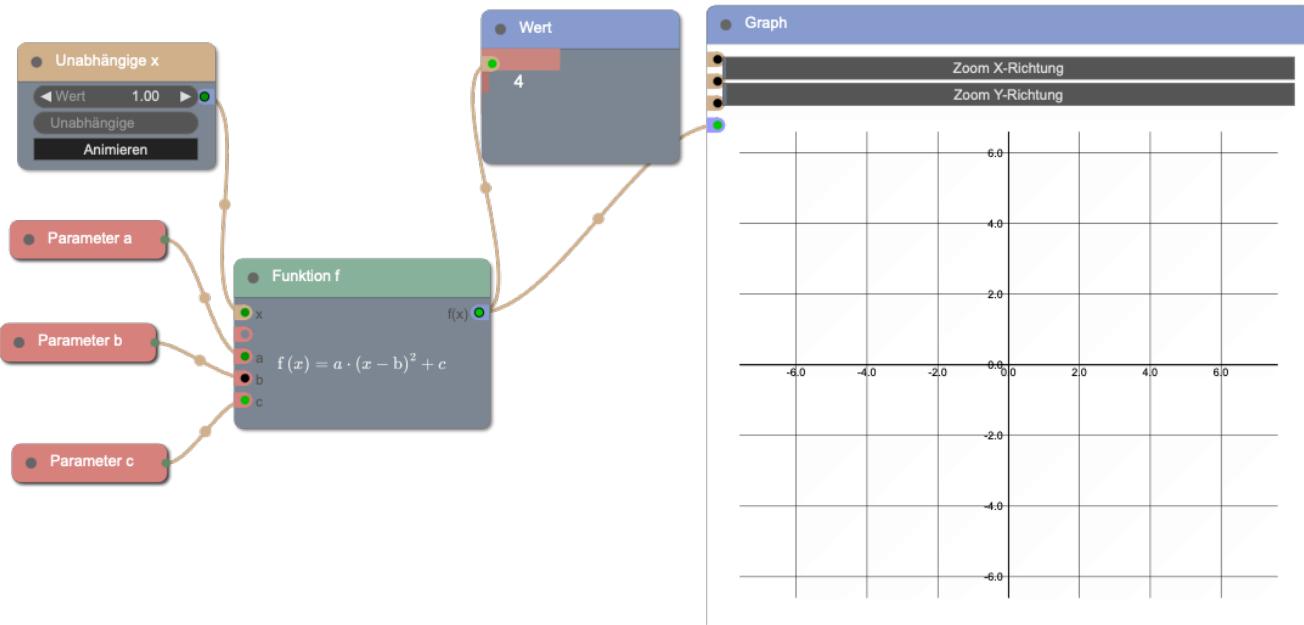
Gib dazu einfach den Namen des angeschlossenen Parameters in der Funktionsgleichung an.

Schließe den Parameter a aus dem Beispiel an die Funktionsmaschine an und verändere den eingestellten Wert. Beschreibe, wie sich der Graph der Funktion abhängig vom Parameterwert ändert.

2 Triff den Graphen

In der Graph-Karte siehst du den Graphen einer quadratischen Funktion. Stelle die Parameter der Funktion f so ein, dass der Graph von f dem weißen entspricht. Gib die eingestellten Werte der Parameter im Arbeitsheft an und beschreibe, was die 3 Parameter jeweils am Graphen verändern.

Finde möglichst viele quadratische Funktionen/Einstellungen für die Parameter, sodass $f(1) = 4$ ist. Skizziere 3 möglichst verschiedene Lösungen. Gib die Parameterwerte an.



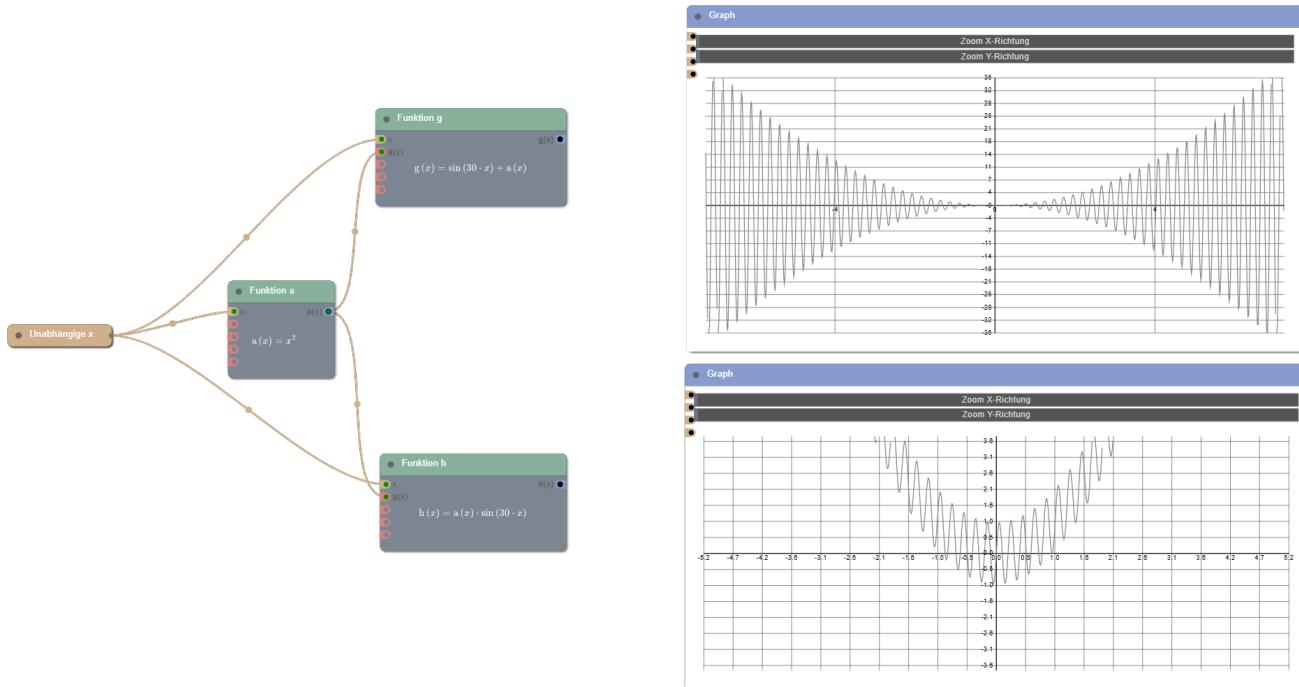
Substitution

An den Parametereingängen einer Funktionsmaschine kannst du auch andere Funktionen anschließen. Dazu muss der Maschinenname und die unabhängige Variable in der Form $f(t)$ in die andere Funktion eingegeben werden. Damit kannst du deine Verkabelung übersichtlicher machen und so zum Beispiel den Einfluss verschiedener Maschinen vergleichen. In der folgenden Aufgabe siehst du ein Beispiel.

3 Wo ist die Parabel?

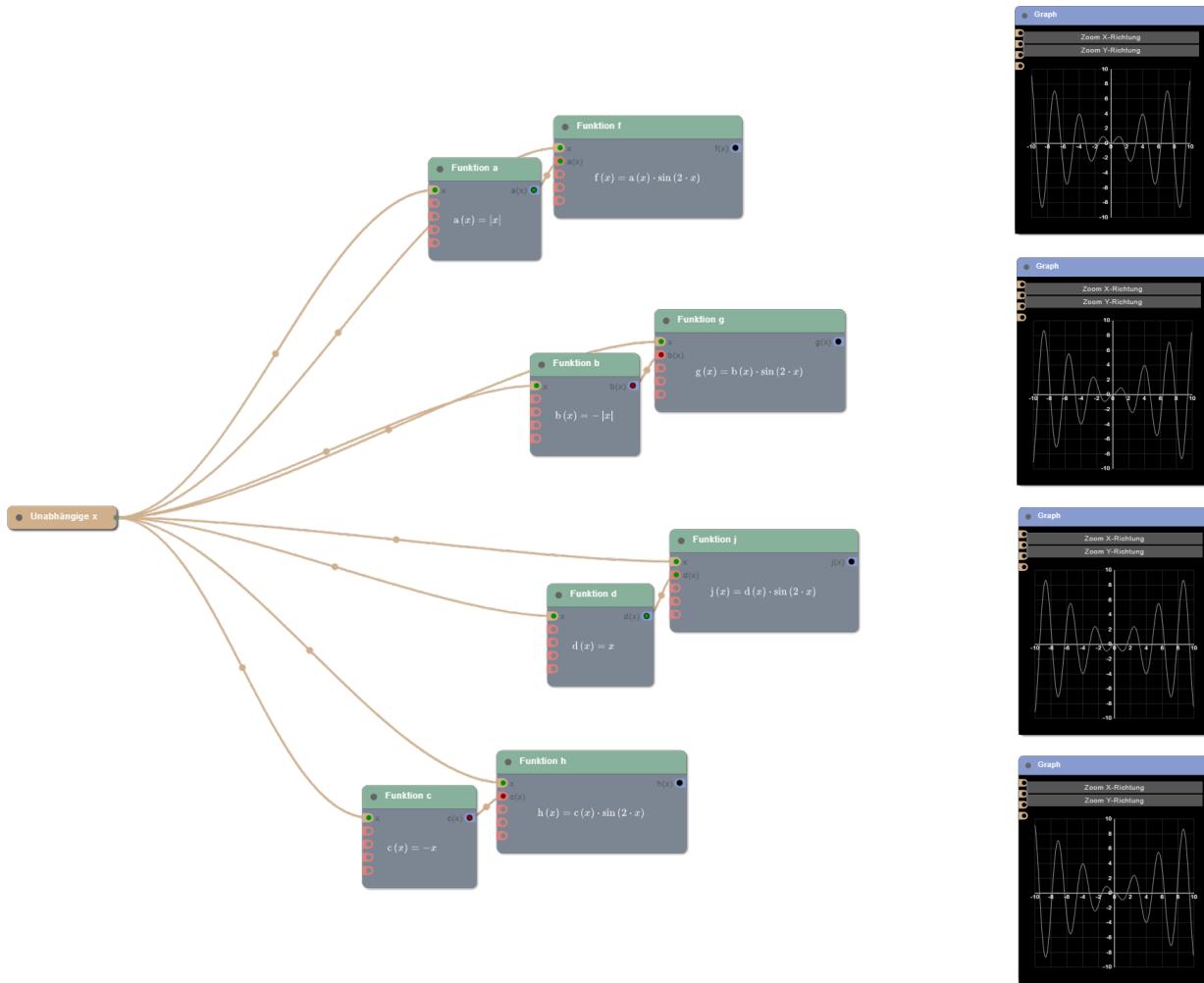
In die Funktionen g und h ist die Funktion a an verschiedenen Stellen eingesetzt worden. Ordne die Funktionen ihren Graphen zu und begründe deine Zuordnung.

Zeichne die Quadratfunktion a in die Graphen des Arbeitshefts ein.



4 Symmetrisch oder nicht?

Du siehst hier immer Paare von Funktionen, bei denen die erste in die zweite eingesetzt ist. Die zweite Funktion ist dabei immer gleich. Ordne die Paare den Graphen zu. Begründe deine Zuordnung im Arbeitsheft.

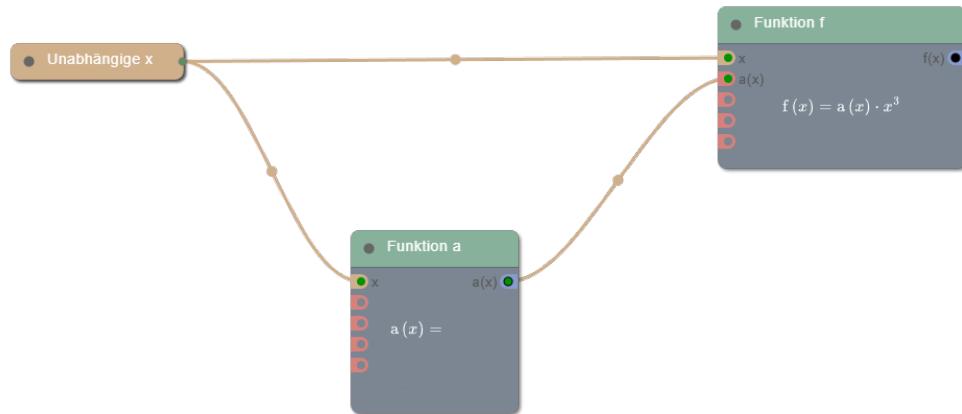


5 Symmetriewechsel

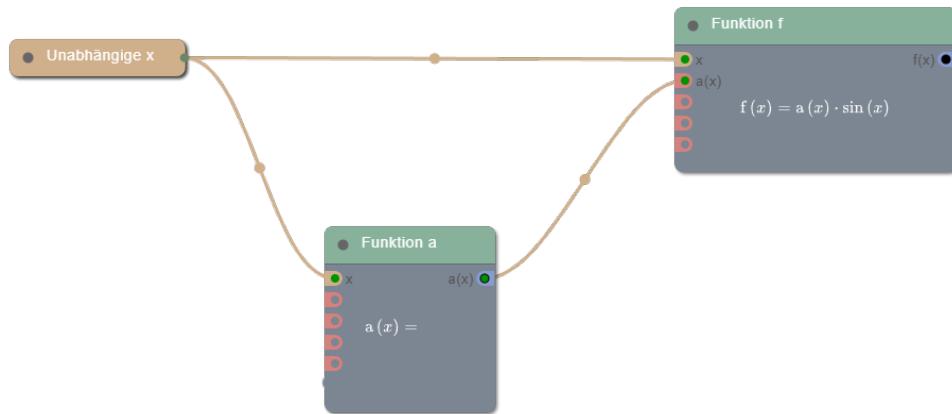
Wähle die Funktion a so, dass die Gesamtfunktionen achsensymmetrisch sind. Du kannst die Funktion frei eingeben, musst aber den Funktionsnamen beibehalten ($a(x) =$).

Finde so viele Funktionstypen wie möglich und gib sie im Arbeitsheft an.

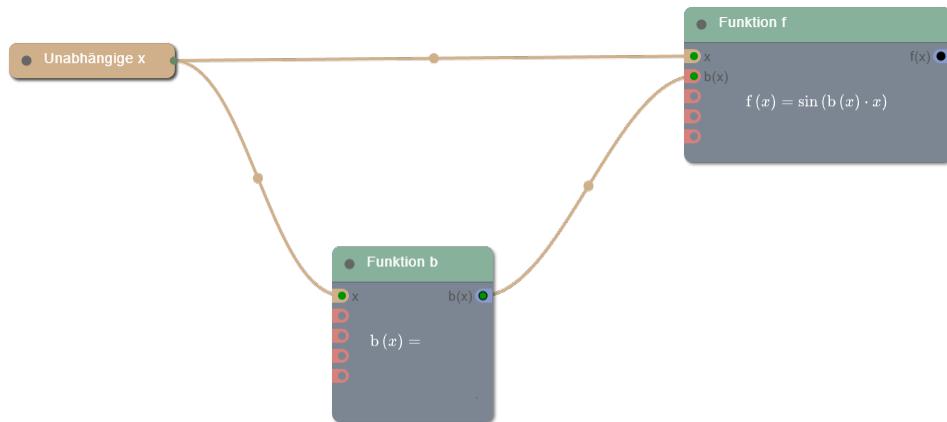
a)



b)



c)



6 Funktionenpuzzle mit Parametern

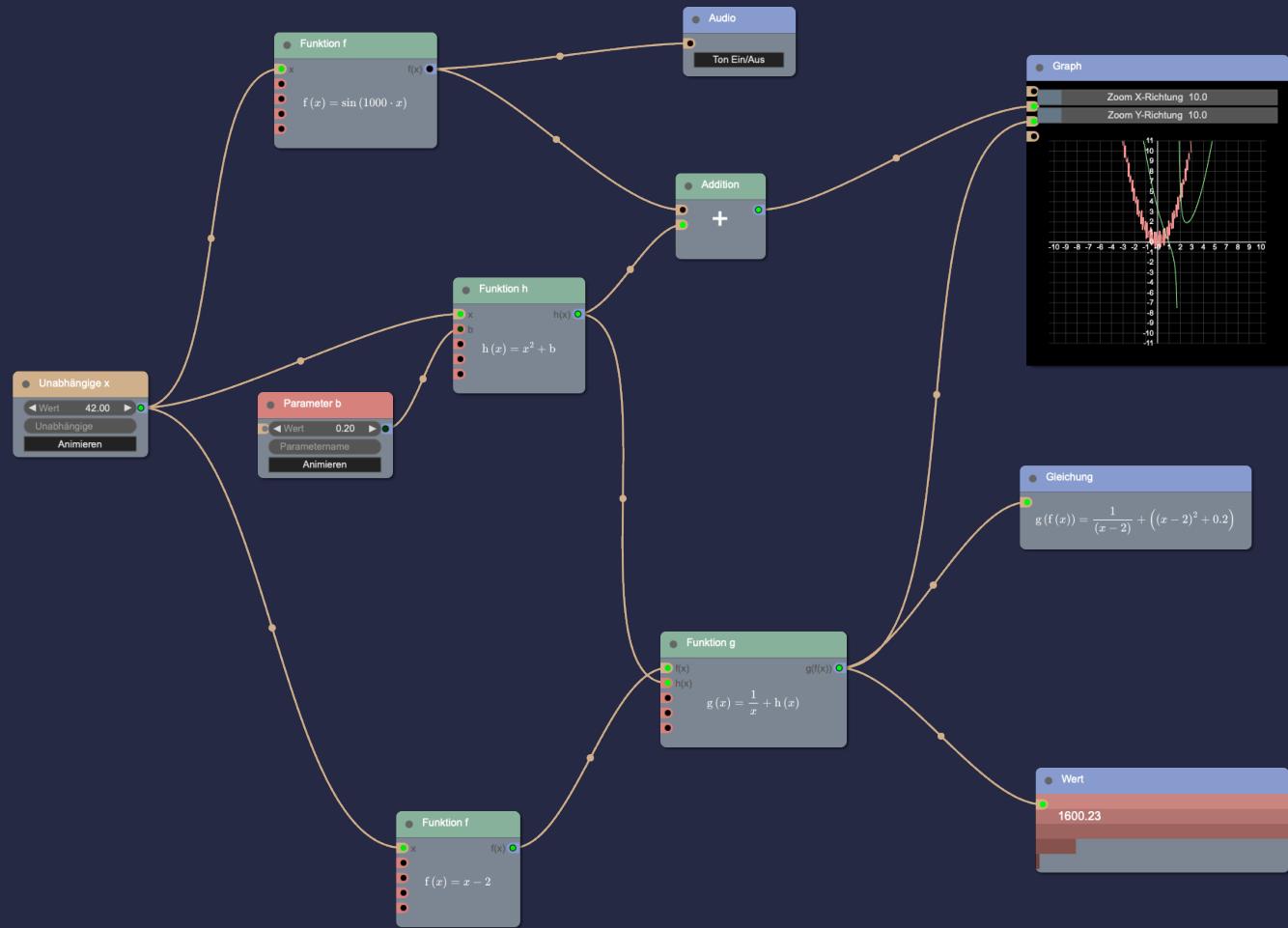
Verknüpfe und/oder verkette die Funktionen und verbinde und stelle die Parameter so ein, dass die weißen Graphen entstehen. Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung und die Parameterwerte im Arbeitsheft an.

Wenn du es richtig gelöst hast, ist keine Karte übrig.

a) _____

b) _____

4. Funktionen hören

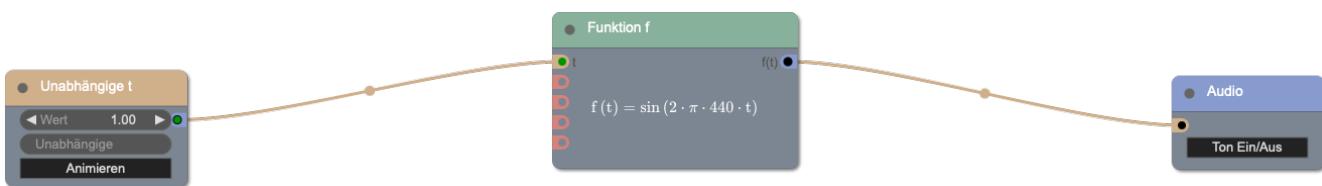


Wie klingt eine Funktion?

Periodische Funktionen sind ein tolles Modell für Töne. Töne sind nämlich physikalisch Schwingungen in der Luft, die sich mit den richtigen Funktionen sehr gut beschreiben lassen. Physikalisch ist die Unabhängige dabei immer die Zeit t . Math-Nodes kann dir aber auch Töne ausgeben, wenn du z.B. x als unabhängige Variable gewählt hast. In den folgenden Beispielen schauen wir uns Stück für Stück an, wie du mit Funktionen Töne erzeugen und in Tonhöhe und Klang verändern kannst.

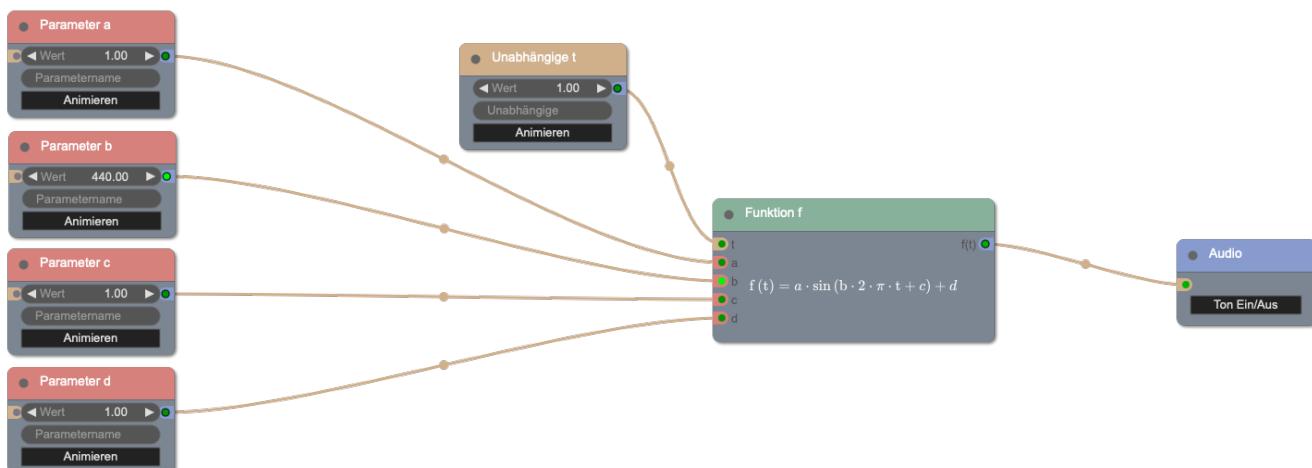
1 Der erste Ton

Um in Math-Nodes einen Ton zu erzeugen, brauchst du mindestens 3 Karten: Eine Karte für die unabhängige Variable, eine Funktionsmaschine und die Audio-Karte. Die Sinusfunktion in diesem Beispiel schwingt 440 mal in der Sekunde hin und her, durchläuft also 2π für $t = 1$ 440 mal. Der entstehende Ton hat also eine Frequenz von 440 Hz. Klicke in der Audio-Karte auf Ton Ein/Aus, starte die Animation der unabhängigen Variable und schaue, ob du etwas hörst.



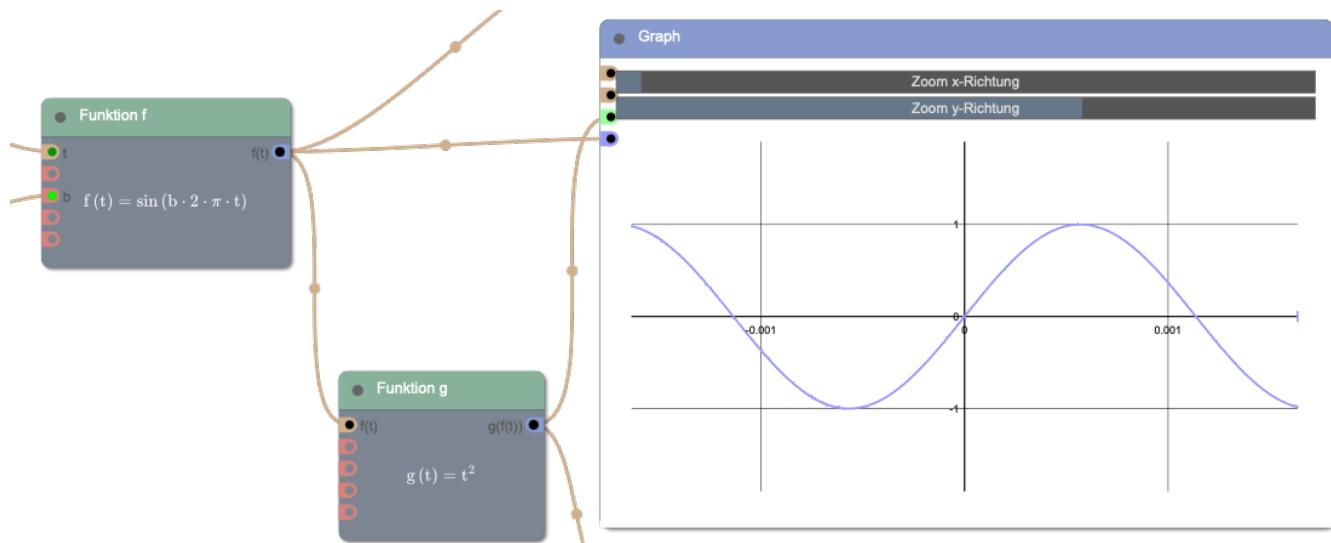
2 Der Einfluss von Parametern

Wenn du bis hier gekommen bist, hast du deinen ersten Ton erzeugt. Klasse! Hier dein erster Forschungsauftrag: Untersuche den Einfluss der Parameter a, b, c, d auf das, was du hörst, also deinen Höreindruck. Verändere dazu die Werte der Parameter an den entsprechenden Karten. Was passiert bei negativen Werten?



3 Sinusfunktion quadrieren – Sehen und Hören

In dieser Aufgabe sollst du die Funktion $f(t) = \sin(b \cdot 2\pi \cdot t)$ mit der Funktion $g(f(t)) = (\sin(b \cdot 2\pi \cdot t))^2$ zunächst grafisch und dann auditiv vergleichen. Hast du eine Vermutung, welchen Einfluss auf den Klang die Funktion g hat? Formuliere sie im Arbeitsheft. Höre dir dann die Funktionen an. Skizziere den Graph von $g(f(t))$ im Arbeitsheft.



4 Die Klavierkarte

Zum Erstellen von Tönen gibt es eine neue Eingabekarte: das Klavier. Die Karte hat eine Klaviatur, die sich entweder mit der Maus oder über die Buchstaben A bis L auf der Tastatur steuern lässt.

Was passiert mit den Werten für f und t wenn du eine Taste für längere Zeit drückst? Beschreibe im Heft.

Vergleiche die Werte für f , wenn du A4 und A5 drückst.

Zusatzfrage: Was passiert, wenn du eine zweite Taste drückst, bevor du die erste losgelassen hast oder mehrere Tasten gleichzeitig drückst?

Ein Instrument bauen

Wenn du für den Parameter f verschiedene Frequenzen einstellst und die unabhängige Variable t animierst, kannst du Töne erzeugen, wie bei einem echten Instrument.

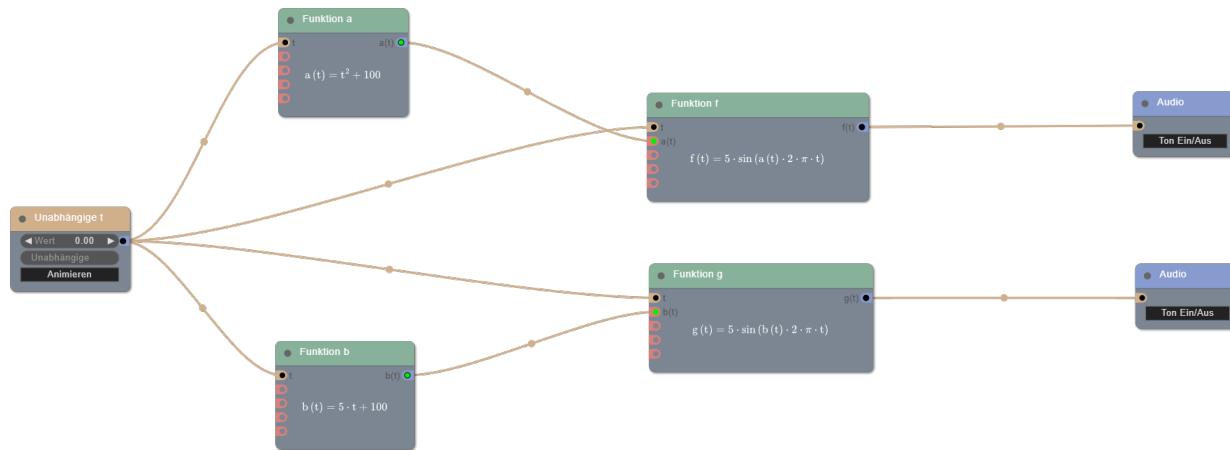
Um nicht jedes Mal neue Frequenzen einzustellen und die unabhängige Variable t manuell animieren zu müssen, steht dir die Klavier-Karte zur Verfügung. Verbinde sie mit der Funktion g , damit du verschiedene Töne spielen kannst.

5 Klavier oder Geige?

Ein Merkmal eines Instruments ist, wie die Lautstärke eines Tons sich nach dem Anschlagen verändert. Geigen beginnen z.B. leise und werden beim Streichen immer lauter. Ein gedämpftes Klavier hingegen beginnt laut und wird dann schnell leiser.

Versuche mit den gegebenen Maschinen den Lautstärkeverlauf deiner Töne zu verändern. In Teilaufgabe b kannst du dir eine Beispiellösung ansehen.

Funktionen wie g in Teilaufgabe b nennt man auch Hüllkurven. Kannst du dir vorstellen, warum?



Tipp: Funktionen selbst eingeben

In der nächsten Aufgabe erstellst du eigene Funktionsmaschinen. Dazu nutzt du die freie Eingabe. Hier ein paar wichtige Regeln:

Funktionsname: Jede Funktion braucht einen Namen, z.B. k und eine Variable, z.B. t . Schreibe dann: $k(t) = \dots$

Parameter: Du kannst weitere Parameter nutzen, z.B. $k(t) = a \cdot t^2 + b$. Vergiss nicht die Malpunkte zu setzen!

Besondere Funktionen: Wurzel: `sqrt()`, Betrag: `abs()`

Anschlüsse: Die Unabhängige-Variable-Karte, die du oben an der Funktionsmaschine anschließt, muss den gleichen Namen haben wie in deiner Funktion – also musst du z.B. $f(t) = \sin(t)$ schreiben, wenn du t in deiner Unabhängige-Variable-Karte hast. Alle Parameter müssen angeschlossen sein.

Klavier-Karte: Hat immer die Variable t und den Parameter f für die Tonhöhe.

6 Wort zu Ton

Erstelle je eine Verkabelung, sodass der entstehende Ton den folgenden Beschreibungen entspricht. Gib die Funktionsgleichungen im Arbeitsheft an.

- a) Der Ton beginnt leise und wird immer lauter.
- b) Der Ton beginnt laut, wird dann leiser und nach einer gewissen Zeit wieder lauter.
- c) Der Ton beginnt laut und wird immer leiser bis er nicht mehr zu hören ist. Gleichzeitig schwankt die Lautstärke periodisch.

a) _____

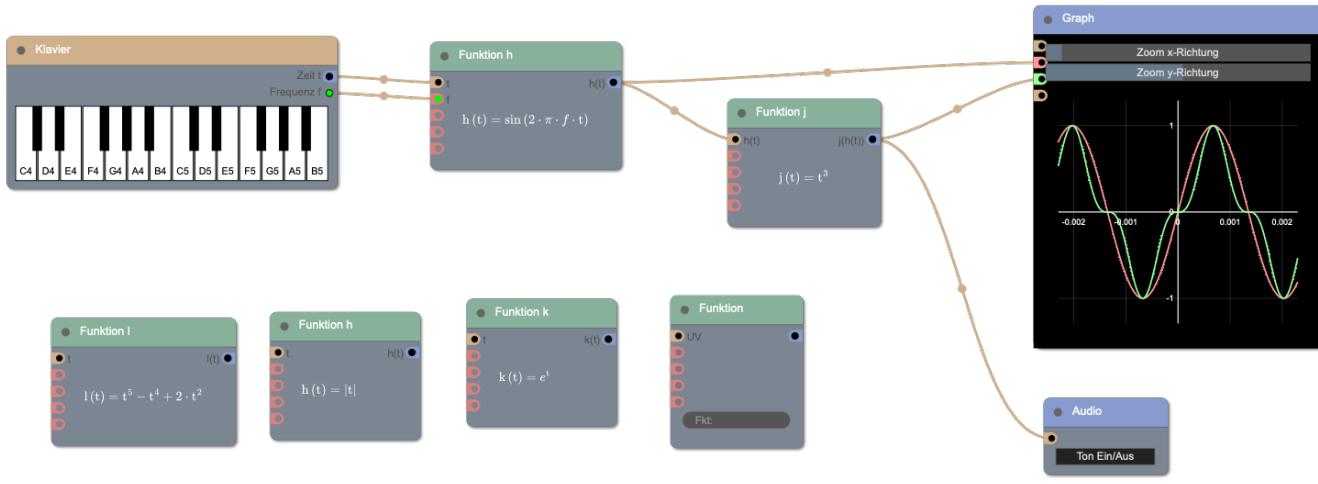
b) _____

c) _____

7 Klangfarbe

Verschiedene Instrumente klingen unterschiedlich, auch wenn sie die gleiche Tonhöhe und Lautstärke haben. Das liegt daran, dass die Schwingungen der Instrumente sich zwar durch periodische Funktionen beschreiben lassen, diese aber keine reinen Sinusfunktionen sind.

Eine Möglichkeit, solche komplexeren periodischen Funktionen zu erzeugen, ist es, eine Sinusfunktion mit anderen Funktionen zu verketten. Probiere die gegebenen Maschinen aus und beschreibe im Heft, wie sich der Klang unterscheidet. Nimm dabei auch Bezug auf den Graphen.



j) _____

h) _____

k) _____

l) _____

8 Instrumentenwerkstatt

Erstelle ein Instrument deiner Wahl. Variiere dabei die Klangfarbe und den Lautstärkeverlauf. Beschreibe im Heft den Klang deines Instruments und wie du ihn erzeugt hast. Skizziere deine Verkabelung und den Graphen eines Tons.

